INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA a XI a

1. Să se determine funcţiile $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ care satisfac simultan condiţiile:

i) $f(x)\le\dfrac{x-2}{\ln 2}, x>1;$

ii) $f(x^3+1)\le 3f(x+1), x>0;$

iii) $f(x)+f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\ge 0, x>1;$

Gazeta Matematică

2. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\ge1}$ cu termeni pozitivi şi proprietatea

$x_{n+1}>3x_n, \forall n\ge1, x_1=1,$

$x_2=5$, definit prin relaţia de recurenţă: $\log_2(x_{n+2}-3x_{n+1})+2^{x_{n+2}-3x_{n+1}}=2+\log_2(x_n)+16^{x_n}$.

Adela Dimov, Brăila

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}9 & 2 & 9\\ 1 & 18 & 1\\ 9 & 2 & 9\end{pmatrix}$.

a) Aflaţi $A^n, n\ge1$.

b) Demonstraţi că matricea A^n+I_3 este inversabilă, $\forall n\ge2$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

4. Fie $A_n=\{1,5,9,13,...,4n+1\}$ şi a_n numărul pătratelor perfecte din mulţimea $A_n, \forall n\ge1$.

i) Să se determine a_{503}.

ii) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{a_k}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Notă.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.
Timp de lucru 3 ore.