Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a XI- a

Subiecte :

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + d = 3, ad - bc = 2$.

a) Arătați că $A^3 = 7A - 6I_2$.
b) Să se arate că $\det(A^2 + 2I_2) = 18$.
c) Să se arate că $\det(A^2 + 5I_2) = 54$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $A^{2016} = x^{672} I_3$.
b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $B = A^4 + A^5 + A^6$ este inversabilă.

3. Fie $S_n = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.
b) Să se arate că $0 < S_n < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} + 6S_n\right)^{n^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Prof. Mihai Bodan, Ciuperceni

4. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4}{x^2+1}} + ax + b \right) = 1 .$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru : 3 ore. La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem cls. a XI-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1.a) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$, deci $A^2-3A+2I_2=O_2$……………………………….2 p
$A^2=3A-2I_2$. Înmulțind cu A, $A^3=3A^2-2A=3(3A-2I_2)-2A=7A-6I_2$………… 1 p

b) Din relația de la a) , $det(A^2+2I_2)=det(3A)=3^2 detA=18$……………………………….2 p

c) $det(A^2+5I_2)=\det(3A+3I_2)=\det(3(A+I_2))=3^2\det(A+I_2)$.
$\det(A+I_2)=\begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix}=(ad-bc)+\ a+d+1=6$, de unde rezultă relația……….2 p

2. a) Va rezulta $A^3=x\,I_3, A^{2016}=A^{3\cdot 672}=(x\,I_3)^{672}=x^{\,672}I_3$…………………………………….3 p

b) $det(A^4+A^5+A^6)=det[A^4(I_3+A+A^2]=(detA)^4\ det(I_3+A+A^2)\neq 0$ deci
$detA\neq 0$ și $det(I_3+A+A^2)\neq 0$…………………………………………………………….2 p
$detA=x$ și $det(I_3+A+A^2)=(x-1)^2$, deci $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$……………………………….2 p

3. a) Verificare prin calcul…………………………………………………………………….2 p

b) Avem $S_n=\frac{1}{6}\cdot\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\right]-\frac{1}{2}\cdot$
$\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\ldots\ldots+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\ldots+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right]$, deci obținem

$$S_n=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{11}{36}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right).$$

$$\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}=\frac{2\cdot(n^2+4n+3)-(n^2+5n+6)-(n^2+3n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{-2}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}.$$

Se obtine $S_n=\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\cdot\frac{-2}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$, cu $n\geq 1$, deci
$0<S_n<1,$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$……………………………………………………………3 p

c) $6S_n+\frac{2}{3}=1+\frac{-2}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$, deci

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+6S_n\right)^{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\right)^{n^3}=e^{-2}$ ……………………………….2 p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^4}{x^2+1}}+ax\right)=1-b$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}+ax\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left((-x)\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}+a\right)=1-b$, deci $a=1$

……………………………………………………………………………………………………….2 p

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\frac{1-\frac{x^2}{x^2+1}}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}}=$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x^2+1}}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}}=0, 1-b=0, b=1$ ....……………………………………….5 p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro