OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VII – a

1. (3 p) a) Arătați că : $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, pentru orice număr natural n .

   (4 p) b) Stabiliți dacă numărul a este rațional , unde :

$$a = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{42}} + \ldots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}.$$

2. (7 p) Să se determine două numere naturale a căror sumă este 29 , știind că unul are 2 divizori , celălalt exact 5 divizori , iar suma tuturor divizorilor (celor 7) este 45 .

3. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $DB \perp BC$. Prin punctul C se duce o perpendiculară pe DC, care intersectează diagonala BD în E .

   (4 p) a) Demonstrați că $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle DAB$.

   (3 p) b) Dacă $m(\sphericalangle A) = 60^o$, arătați că $\frac{BE}{EC} = \frac{CB}{BA}$.

4. (7 p) În pătratul $ABCD$ se consideră M și N mijloacele laturilor $[AD]$ și $[DC]$. Fie $P \in (MB$ astfel încât $MB = BP$. Dacă $BD = 8\ cm$, aflați distanța de la B la NP

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,
Timp de lucru : 3 ore
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a VII – a

1. a) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ (3 p)

   b) $a=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{20}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}+\cdots+\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}-\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}$

   $a=\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$ (2 p)

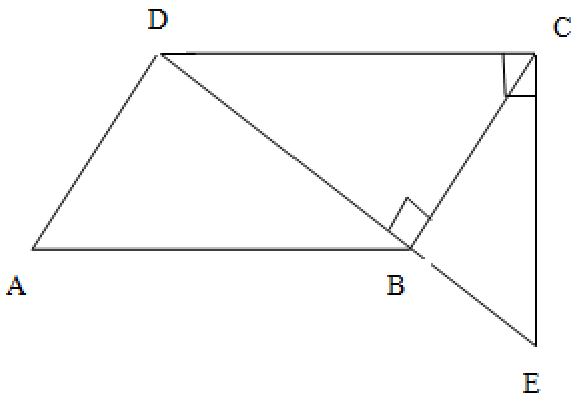
   $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\in\mathbb{Q}$ (2 p)

2. a) Fie a , b astfel încât $a+b=29$. Cum a are 2 divizori , rezultă că $a=p$, unde p număr prim şi $\mathcal{D}_a=\{1,p\}$ (2 p)

   Numărul b are 5 divizori $\Longrightarrow b=q^4$, unde q este număr prim iar $\mathcal{D}_b=\{1,q^1,q^2,q^3,q^4\}$ (2 p)

   Suma divizorilor este $1+p+1+q+q^2+q^3+q^4=2+(p+q^4)+q^1+q^2+q^3=2+(a+b)+q^1+q^2+q^3=45\Longrightarrow q^1+q^2+q^3=45-31=14$. Rezultă $q(1+$ $q1+q2=14 \Rightarrow q14 \Rightarrow q\in 2,7$ (2 p)

   Soluția este $q=2$, deci $b=2^4=16\Longrightarrow a=29-16=13$ (1 p)

3. 

(1 p) (1 p)

a) $ABCD$ paralelogram $\Longrightarrow m(\sphericalangle ABC)+m(\sphericalangle BCD)=180^o$.

Notăm $m(\sphericalangle ABD) = x$ și $m(\sphericalangle BCD) = y \implies x + 90^o + y = 180^o \implies$
$x + y = 90^o$. $m(\sphericalangle BCE) = 90^o - y = x^o$ (2 p)

În ΔBCE , $(\sphericalangle B) = 90^o$, $m(\sphericalangle BEC) = y$ și cum $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BCD) \implies$
$m(\sphericalangle BEC) = m(\sphericalangle DAB)$ (1 p)

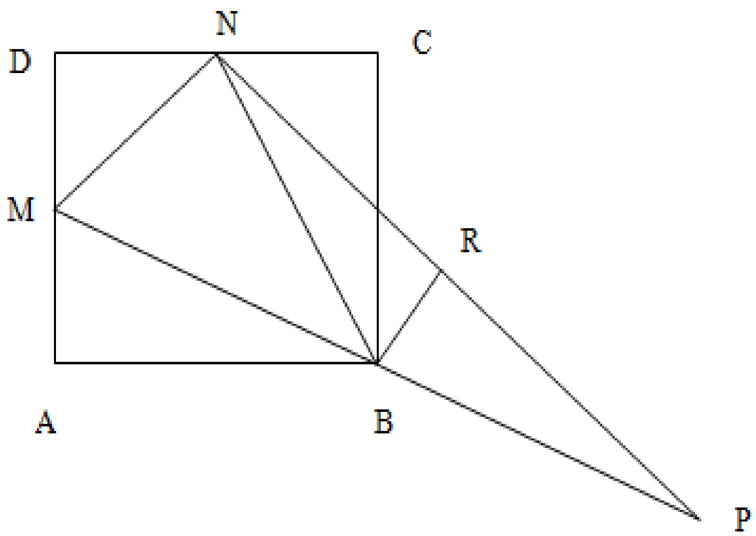
b) $m(\sphericalangle A) = 60^o \implies m(\sphericalangle ABD) = 30^o \implies \Delta BEC$ dreptunghic în B (1 p)

$m(\sphericalangle BCE) = 30^o \implies BE = \frac{CE}{2} \implies \frac{BE}{CE} = \frac{1}{2}$.

În ΔBCD $m(\sphericalangle B) = 90^o$, $m(\sphericalangle BDC) = 30^o \implies BC = \frac{DC}{2} \implies \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2}$ (1 p)

$[DC] = [BA]$, rezultă $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{BA}$ (1 p)

4.



(1 p)

$\Delta MAB \equiv \Delta NCB \implies \left| \begin{matrix} BM = BN \\ BN = BP \end{matrix} \right. \implies NB = \frac{MP}{2}$ (2 p)

ΔMNP *dreptunghic* $\left(\hat{N} = 90^0\right) \implies MN \perp NP$, $BR \perp NP \implies MN \| BR$ (2 p)

B mijlocul lui MP , deci BR este linie mijlocie în $\Delta MNP \implies BR = \frac{MN}{2} = \frac{AC}{4} = 2$ cm

(2 p)