OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – FAZA ZONALĂ

16. 02. 2013

Clasa a V-a

I Fie $x = \{[(1^{40})^{50} + (2 \cdot 3^2)^2 : (2 \cdot 3)^2 - 2^3]^{67}\}^{30}$

$y = (16^{10})^{100} : (4^{20})^{50} \cdot 2$

$z = 1326 \cdot 430 - 430 \cdot 1300 - 26 \cdot 429 + 486$

a) Calculați numerele x, y, z.

b) Calculați $(x : y - z)^{2013}$

c) Aflați ultima cifră a numărului y.

d) Justificați dacă x este pătrat perfect sau cub perfect.

II 1) Determinați numărul natural $\overline{abc}$ scris în baza 10 știind că: $\overline{62abc} + \overline{6abc2} + \overline{2abc6} + \overline{abc62} = 235119$.

2) Arătați că numărul $x = 1 + 3 + 5 + \dots + 2013$ este pătrat perfect.

III La împărțirea a două numere naturale câtul este de 6 ori mai mic decât diferența dintre deîmpărțit și rest, iar împărțitorul este de 3 ori mai mare decât câtul. Știind că restul este mai mare decât 4, aflați deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul.

IV Fie mulțimea $A \subset \mathbb{N}$ astfel încât:

a) $2 \in A$ și $5 \in A$;

b) Dacă $x \in A$ atunci $(3x+2) \in A$;

c) Dacă $(7x-4) \in A$ atunci $x \in A$.

Arătați că $\{3; 8; 12; 17\} \subset A$.

Notă:
- Timp de lucru 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se notează cu maxim 7 puncte.

SUCCES!

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – FAZA ZONALĂ

16.02.2013 – Cls. a V-a

Barem de corectare și notare

I a) $x = \left[(1+1\cdot 9-8)^{67}\right]^{30} = 2^{2010}$ (1,5p)

$y = (2^4)^{1000} : (2^2)^{1000} \cdot 2 = 2^{2001}$ (1,5p)

$z = 430(1326-1300) - 26\cdot 429 + 486 = 26(430-429)+486$
$= 512$ (1p)

b) $(x:y-z)^{2013} = (2^{2010} : 2^{2001} - 512)^{2013} = 0$ (1p)

c) $U(y) = U(2^{2001}) = 2$ (1p)

d) $x = (2^{1005})^2$ pătrat perfect și $x = (2^{670})^3$ cub perfect (1p)

II 1) $\overline{62abc} = 62000 + \overline{abc}$ .... (1p)

$62000 + \overline{abc} + 60002 + 10\cdot\overline{abc} + 20006 + 10\cdot\overline{abc} + 100\cdot\overline{abc} + 62 = 235119$ (1p)

$121\cdot\overline{abc} + 142070 = 235119$
$121\cdot\overline{abc} = 93049$ (1p) $\Rightarrow \overline{abc} = 769$ (1p)

2) nr. de termeni $= (2013-1):2+1 = 1007$ (1p)

$x = \dfrac{(1+2013)\cdot 1007}{2} = \dfrac{2014\cdot 1007}{2} = 1007^2 = p.p.$ (2p)

III $D : Î = C$, rest $R \Rightarrow D = Î\cdot C + R$ și $R < Î$ (1p)

$C = (D-R):6 \Rightarrow D-R = 6\cdot C \Rightarrow D = 6\cdot C + R$ (1p)

$\Rightarrow \boxed{Î = 6}$ (1p)

$Î = 3\cdot C$
$R > 4$ (1p)

$\Rightarrow 6 = 3\cdot C \Rightarrow \boxed{C=2}$ (1p)

$R > 4$ și $R < 6 \Rightarrow \boxed{R=5}$ (1p) $\Rightarrow \boxed{D=17}$ (1p)

IV $2\in A \xRightarrow{b)} 3\cdot 2+2 = \underline{8\in A}$ (2p)

$5\in A \xRightarrow{b)} 3\cdot 5+2 = \underline{17\in A}$ (2p)

$17\in A \Rightarrow 7\cdot 3-4 \in A \xRightarrow{c)} \underline{3\in A}$ (2p)

$8\in A \xRightarrow{b)} 3\cdot 8+2 = 26\in A \xRightarrow{b)} 3\cdot 26+2\in A \Rightarrow 80\in A$

$80\in A \Rightarrow 7\cdot 12-4\in A \xRightarrow{c)} \underline{12\in A}$ (1p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ – februarie 2013
CLASA A VI-A

1. a) Determinați numărul natural x pentru care $a = \frac{12(x-3)}{x}$ este un număr natural, pătrat perfect.

   b) Numerele naturale distincte a și b verifică relația $9 \cdot [a;b] = a \cdot b \cdot (a;b)$, unde $[a;b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b, iar $(a;b)$ este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

   i) Arătați că a și b nu sunt prime între ele.

   ii) Arătați că diferența numerelor a și b este cel puțin 3.

2. Se dau numerele:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} \quad \text{și} \quad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$$

   a) Calculați $a+b$.

   b) Dacă $c = 100 - b$ comparați a cu c.

3. Punctul M este mijlocul segmentului (AB), $C \in (AM)$, iar D este mijlocul segmentului (BC).

   a) Să se arate că $D \in (MB)$.

   b) Știind că $CM = 3\text{ cm}$, $AB = 30\text{ cm}$, să se calculeze lungimea lui (MD).

4. Se consideră unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$. astfel încât bisectoarele lor $[OM$ respectiv $[ON$ să formeze un unghi de $75°$.

   a) Să se determine $m(\widehat{AOB})$ și $m(\widehat{BOC})$ știind că $3 \cdot m(\widehat{BOC}) = 2 \cdot m(\widehat{AOB})$.

   b) Dacă semidreapta $[OT$ formează unghi drept cu semidreapta $[OM$ astfel încât punctele M și T sunt de aceeași parte cu punctul B față de punctul A, să se arate că $[OT$ este bisectoarea $\sphericalangle CON$.

Timp de lucru: 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu maxim 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE

CLASA A VI-A

1. a) $x \mid 36 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ — — — 1p

$x \in \{1, 2\}$ nu convine

$x = 3 \Rightarrow a = 0$
$x = 4 \Rightarrow a = 3$
$x = 6 \Rightarrow a = 6$
$x = 9 \Rightarrow a = 8$
$x = 12 \Rightarrow a = 9$ p.p.
$x = 18 \Rightarrow a = 10$
$x = 36 \Rightarrow a = 11$ — — — 2p.

b) i) $a \cdot b = [a;b] \cdot (a;b)$ — — — 1p

$9 = (a;b)^2 \Rightarrow (a;b) = 3 \neq 1$ — — — 1p

ii) $(a;b) = 3 \Rightarrow a = 3a_1$, $b = 3b_1$, unde $(a_1; b_1) = 1$

$a - b = 3a_1 - 3b_1 = 3(a_1 - b_1)$, $a_1 \neq b_1$

$a - b \geq 3$ — — — 2p

2. a) $a + b = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} + \dots + \underbrace{\frac{99}{100} + \frac{1}{100}}$ — — — 1p.

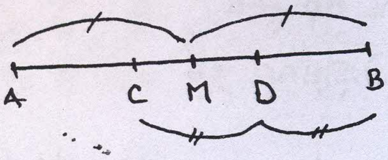
$a + b = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{99 \text{ termeni}} \Rightarrow a + b = 99$ — — — 2p

b) $c = 100 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right)$ — — — 1p

$c = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} + \dots + 1 - \frac{1}{100} + 1$ — — — 1p

$c = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} + 1$ — — — 1p

$c = a + 1 \Rightarrow a < c$ — — — 1p

3. 

— — — 1p.

a) $AB = 2 \cdot MB$, $CB = 2 \cdot DB$, $CB < AB$ $\Rightarrow DB < MB \Rightarrow D \in (MB)$ — — — 1p.

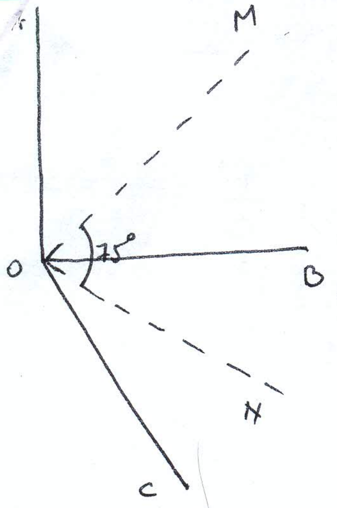
b) $AM = MB = 15\text{cm}$ — — — 1p

$AC = AM - CM = 12\text{ cm}$ — — — 1p

$CB = AB - AC = 18\text{ cm}$ — — — 1p

$CD = DB = 9\text{ cm}$ — — — 1p

$MD = CD - CM = 6\text{ cm}$ — — — 1p.



desen ---------- 1p.

a) $[OM$ bis $\widehat{AOB} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot m(\widehat{MOB})$ ----------
$[ON$ bis $\widehat{BOC} \Rightarrow m(\widehat{BOC}) = 2 \cdot m(\widehat{BON})$ ---------- } 1p

$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 150°$ ---------- 1p.

$m(\widehat{BOC}) = 60°$ ----------
$m(AOB) = 90°$ ---------- } 1p.

b) $m(\widehat{TON}) = 15°$ ---------- 1p.

$m(\widehat{BON}) = 30°$ ----------
$m(\widehat{BOT}) = 45°$ ---------- } 1p

$m(\widehat{TOC}) = 15°$ ----------
$\sphericalangle TON \equiv \sphericalangle TOC \Rightarrow [OT$ bis. $\sphericalangle CON$ ---------- } 1p.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA ZONALĂ – februarie 2013 –
CLASA a VII-a

I Dacă $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$, $\frac{y}{6}=\frac{z}{8}$, iar media aritmetică a numerelor x, y, z este nr $a=\frac{1}{3}\cdot\left[5+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{0,3(7)}:\frac{1}{340}-\frac{1}{0,01}\right)\right]$, să se afle nr. x, y și z.

II 1. Se dau numerele:

$$a=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 23}+\frac{7}{23\cdot 30}$$

$$b=3+8+13+\ldots+10018$$

Arătați că numărul $A=\sqrt{15a+\frac{b}{1002}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

2. Arătați că numărul

$$p=n\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

este număr natural pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$

III În paralelogramul $ABCD$ alegem $M\in(DC)$ astfel încât $CM=2DM$ și $N\in(BC)$ astfel încât $BN=2NC$. Știind că $A_{\Delta CMN}=16\text{ cm}^2$, aflați aria paralelogramului $ABCD$.

IV. $ABCD$ este un paralelogram, M și N două puncte pe latura $[BC]$, astfel încât $BM=MN=NC$, iar P un punct pe latura $[CD]$, astfel încât $CP=PD$. Dacă $AM\cap CD=\{E\}$, $AN\cap CD=\{F\}$, $AP\cap BC=\{G\}$, demonstrați că:

a) $NP \parallel MD$ și $BP \parallel GF$

b) GE nu este paralelă cu MD

c) dreptele AN, BP și DM sunt concurente într-un punct O.

Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează cu maxim 7 puncte.

BAREM DE CORECTARE
CLASA a VII-a

$a = 15$ (3p)

$x = 4k$
$y = 6k$ (2p) $k = \frac{5}{2}$ (1p)
$z = 8k$

$x = 10;\ y = 15;\ z = 20$ (1p)

II 1) $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}$ (2p)

$b_1 = 3$
$b_2 = b_1 + 5$
$b_3 = b_2 + 5 = b_1 + 2\cdot 5$
$b_4 = b_3 + 5 = b_1 + 3\cdot 5$
$\ldots\ldots\ldots$
$b_{2004} = \qquad = b_1 + 2003\cdot 5$

$b = 3\cdot 2004 + 5(1+2+\ldots+2003) = 1002\cdot 10021$ (1p)

$A = \sqrt{15\cdot\frac{7}{15} + \frac{1002\cdot 10021}{1002}} = \sqrt{10028} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (1p)

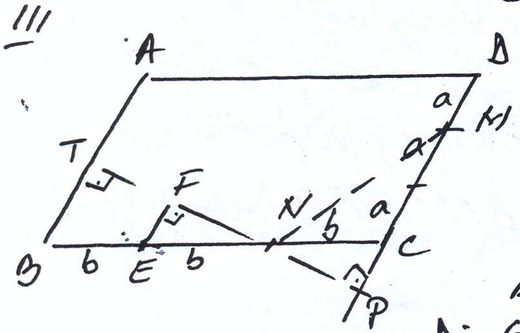
finalizare – ultima cifră 8 $\Rightarrow A \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

2) $P = n\cdot\left(\frac{n+1}{2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{n^2+n-2}{2}$ (1p)

I $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$
$P = \frac{4k^2+2k-2}{2} = 2k^2+k-1 \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}$ (1p)

II $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$
$P = \frac{(2k+1)^2+(2k+1)-2}{2} = k^2+3k \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}$ (1p)

III



Notăm $DM = \frac{CM}{2} = a$ și $NC = \frac{BN}{2} = b$

Ducem $TP \perp AB$

$AB \parallel DC \Rightarrow TP \perp CD$

EF l.m. în $\Delta TBN \Rightarrow TF = FN$ (*) $EF \perp TN$ (2p)

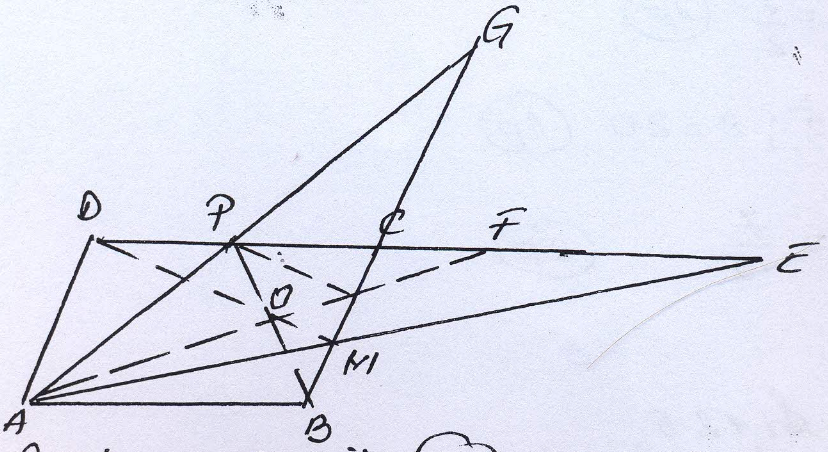
$\Delta EFN \equiv \Delta NCP$ (i.u) $\Rightarrow FN = NP$ (**)

Din (*) și (**) $\Rightarrow TF = FN = NP$ (2p)

$A_{\Delta CMN} = \frac{CM\cdot NP}{2} = \frac{2a\cdot NP}{2} = a\cdot NP = 16\,(cm^2)$ (2p)

$A_{ABCD} = DC\cdot TP = 3a\cdot 3NP = 9a\cdot NP = 9\cdot 16 = 144\,(cm^2)$ (1p)

IV



a) Construcția figurii (1p)

În ΔMCD, $[NP]$ l.m. deci $NP \parallel MD$ (1p)

$$\left.\begin{array}{l} CN \parallel DA \xRightarrow{T.Th.} \dfrac{FC}{CD} = \dfrac{FN}{NA} \\ CF \parallel AB \xRightarrow{T.Th.} \dfrac{FN}{NA} = \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{FC}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow FC = CP \ (*)$$

$\Delta DPA \equiv \Delta CPG$ (ULU) $\Rightarrow CG = DA = CB$ $(**)$

Din $(*)$ și $(**)$ $\Rightarrow BPGF$ paralelogram, deci $BP \parallel GF$ (1p)

b)
$$\left.\begin{array}{l} CM \parallel DA \xRightarrow{T.Th} \dfrac{EC}{CD} = \dfrac{EM}{MA} \\ AB \parallel CE \xRightarrow{T.Th} \dfrac{EM}{MA} = \dfrac{CM}{MB} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EC}{CD} = 2$$

Presupunând $GE \parallel DM \Rightarrow 2 = \dfrac{EC}{CD} = \dfrac{GC}{CM} = \dfrac{3}{2}$ contradicție (2p)

c) $PF \parallel AB$, $[PF] \equiv [AB] \Rightarrow ABPF$ paralelogram

Fie $AF \cap BP = \{O\}$. În ΔPBN, $[OM]$ este l.m., deci $OM \parallel PN$ și cum de la punctul a) avem $DM \parallel PN$, rezultă că punctele D, O și M coliniare, deci $AN \cap BP \cap DM = \{O\}$ (2p)

Notă: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – FAZA ZONALĂ

16.02.2013.

CLASA a VIII a

I 1. Se dau $a = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}} + \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{5}}$ şi $b = \frac{(-1)^{m+2}}{\sqrt{2}} - \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{5}}$

unde $m, n \in \mathbb{Z}$. Arătaţi că $10 \cdot ab \in \mathbb{Z}$.

2. Arătaţi că dacă

$$3a^2 + 3b^2 - 2a - 14b + \frac{46}{3} = 0,$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $\frac{4}{3} \le a + b \le 4$.

II Să se arate că dacă x şi y sunt numere reale, ce satisfac simultan condiţiile : $x \in [-2; 3]$ şi $x - 5y + 2 = 0$, atunci expresia

$\sqrt{(x+2)^2 + 2y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 2(y-1)^2}$ este constantă

III. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm şi măsura unghiului format de dreapta BD' cu planul (ABB') este de $30°$. Fie $M \in (CC')$ astfel încât $CM = 5$ cm şi $N \in [BB']$ astfel încât perimetrul ΔAMN să fie minim

a) Calculaţi perimetrul ΔAMN

b) Calculaţi distanţa de la N la planul $(D'BC)$

IV. $ABCD$ este un paralelogram cu $m(\measuredangle A) = 60°$, $AD = 6$ cm, $DB \perp AD$ şi M este mijlocul laturii $[AB]$. În punctul P, $DB \cap CM = \{P\}$, se ridică perpendiculara PQ pe planul paralelogramului $ABCD$, astfel încât $PQ = 2\sqrt{6}$ cm.

a) Aflaţi aria paralelogramului $ABCD$

b) Calculaţi distanţele de la punctul Q la punctul C, respectiv la dreapta BC.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu maximum 7 puncte.

BAREM
CLASA a VIII a

I 1. $a=(-1)^m\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 1p

$b=(-1)^{m+1}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 1p

$10ab=(-1)^{m+m+2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot 10=(-1)^{m+m+2}\cdot 3\in\mathbb{Z}$ ... 1p

2. $9a^2-6a+9b^2-42b+46=0$

$(3a-1)^2+(3b-7)^2=4$ 1p

$(3a-1)^2\le 4$ și $(3b-7)^2\le 4$ 1p

$-2\le 3a-1\le 2$ și $-2\le 3b-7\le 2$

$-4\le 3a+3b-8\le 4$

Finalizare 2p

II $\sqrt{(x+2)^2+2y^2}=\sqrt{(x+2)^2+2\left(\frac{x+2}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{5}|x+2|$ 2p

$y=\frac{x+2}{5}$ 1p

$\sqrt{(x-3)^2+2(y-1)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{5}|x-3|$ 1p

$\sqrt{(x+2)^2+2y^2}+\sqrt{(x-3)^2+2(y-1)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{5}(|x+2|+|x-3|)$ 1p

Finalizare

$=3\sqrt{3}$ 2p

III Figură 1p

$AM=5\sqrt{14}$ – constant 1p

$P_{\Delta AMN}$ minim => $AN+NM$ minim când A, N, M coliniare și desfășurarea suprafeței laterale ... 1p

$AN+NM=5\sqrt{26}$ cm; $P=5(\sqrt{14}+\sqrt{26})$ cm 1p

$AA'=5\sqrt{3}$ cm 1p

$NB=3$ cm 1p

Finalizare 1p

IV Figură 1p

a) $A_{ABCD}=6\cdot 12\cdot \sin 60^\circ=36\sqrt{3}\ cm^2$ 2p

b) $PB=2\sqrt{3}$ cm 1p

$CP=4\sqrt{3}$ cm; $QC=6\sqrt{2}$ 1p

Finalizare $d(Q,BC)=QB=6$ cm 2p