Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

Subiectele – clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux astfel ca $f(a) \cdot f(b) < 0$. Arătaţi că există α, β astfel ca $a < \alpha < \beta < b$ şi $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$.

Problema 2.

Pentru $n \geq 2$ numere reale nenule $a_1, a_2, ..., a_n$, nu neapărat distincte, definim matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ prin $a_{ij} = \max\{a_i, a_j\}, \forall\, i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Arătaţi că $\mathbf{rang}(A) = \mathbf{card}\{a_k |\, k = 1, 2, ..., n\}$.

Problema 3.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de ordinul $n \geq 2$, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ şi } \lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x) = 0.$$

Demonstrați că $\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, unde $f^{(k)}$ reprezintă derivata de ordinul k a funcției f.

Problema 4.

Fie $n \geq 2$ şi matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Presupunem că există $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ astfel încât $xAB + (1-x)BA = I_n$. Arătaţi că $(AB - BA)^n = O_n$.

Timp de lucru: 180 *de minute. Fiecare problemă valorează* 7 *puncte.*