Olimpiada Naţională de matematică, faza locală, judeţul Caraş-Severin, 2016

Cls. a VI-a

I. Se consideră *a*, *b*, *c*, numere naturale nenule consecutive (în această ordine) şi numărul $N = \frac{ab^2c}{2}$.

a) Arătaţi că N este divizibil cu 3;

b) Determinaţi *a* pentru care $N = 2016$.

Prof. Pirvu Camelia, Școala Gimnazială "Romul Ladea" Oravița

II. Cei *n* elevi ai unei școli se află pe terenul de sport. Determinaţi numărul *n* știind că următoarele condiții sunt îndeplinite simultan:

a) $750 < n < 820$;

b) dacă elevii se încolonează câte 13, atunci rămân neîncolonaţi 10 elevi, iar dacă elevii se încolonează câte 6, atunci rămân 2 elevi neîncolonaţi.

Gazeta Matematică 6-7-8/2014

III. Determinaţi numărul perechilor de numere naturale (x, y) pentru care: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2016}$.

Prof. Șandru Marius, Școala Gimnazială Nr. 2 Reșița

IV. Se consideră trei puncte *B*,*O*,*C* pe o dreaptă *a* astfel încât $BO = OC$ şi punctele *D* şi *E* situate pe *(OB)* respectiv *(OC)*, astfel încât $EC = BD$. În semiplane diferite faţă de dreapta *a* se consideră punctele *P* şi *Q* astfel încât $PB = QC$ şi $PE = QD$. Demonstraţi că:

a) $\Delta PBE \equiv \Delta QCD$;

b) punctele *P*, *O*, *Q* sunt coliniare.

Prof. Avramescu Irina, Școala Gimnazială Nr. 9 Reșița

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de matematică, faza locală, judeţul Caraş-Severin, 2016
Barem de corectare şi notare
Clasa a VI-a

I. Se consideră *a, b, c,* numere naturale nenule consecutive (în această ordine) şi numărul $N=\dfrac{ab^2c}{2}$. **a)** Arătaţi că N este divizibil cu 3; **b)** Determinaţi *a* pentru care $N=2016$.	
a) a,b,c find trei numere consecutive, unul se divide cu 3	1p
$2N\vdots 3$ rezultă $N\vdots 3$	2p
b) $\mathrm{N}=\dfrac{\mathrm{n(n+1)^2(n+2)}}{2}=2016\Rightarrow \mathrm{n(n+1)^2(n+2)}=4032\Rightarrow$ $\mathrm{n(n+1)^2(n+2)}=7\cdot 8^2\cdot 9\Rightarrow \mathrm{n}=7\Rightarrow \mathrm{a}=7$	4p
II. Cei *n* elevi ai unei şcoli se află pe terenul de sport. Determinaţi numărul *n* ştiind că următoarele condiţii sunt îndeplinite simultan: **a)** $750<n<820$; **b)** dacă elevii se încolonează câte 13, atunci rămân neîncolonaţi 10 elevi, iar dacă elevii se încolonează câte 6, atunci rămân 2 elevi neîncolonaţi. *Gazeta Matematică 6-7-8/2014*	
$n=13k+10,$ $n=6p+2$	2p
$n+16=13k+26\vdots 13$ $n+16=6p+18\vdots 6$	2p
$(n+16)\vdots 78$	1p
$(n+16)=780$	1p
$n=764$	1p
III. Determinaţi numărul perechilor de numere naturale (x,y) pentru care: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2016}$.	
$x=\dfrac{2016y}{y+2016}$	2p
$x=2016-\dfrac{2016^2}{y+2016}$	1p
$(y+2016)\mid 2016^2$	1p
$A=2016^2=2^{10}\cdot 3^4\cdot 7^2$, $N(A)=11\cdot 5\cdot 3=165$, $N(A)$ - numărul divizorilor lui A	1p
N-numărul căutat, $N=N\left(2016^2\right)-N(2016)=165-1-82=82$	2p

IV. Se consideră trei puncte B,O,C pe o dreaptă a astfel încât $BO = OC$ şi punctele D şi E situate pe (OB) respectiv (OC), astfel încât $EC = BD$. În semiplane diferite faţă de dreapta a se consideră punctele P şi Q astfel încât $PB = QC$ şi $PE = QD$. Demonstraţi că: **a)** $\Delta PBE \equiv \Delta QCD$; **b)** punctele P, O, Q sunt coliniare.	
a) Construcția figurii	1p
Congruența $\Delta PBE \equiv \Delta QCD$	2p
b) Congruența $\Delta PEO \equiv \Delta QDO$	2p
Congruența $\sphericalangle POE \equiv \sphericalangle QOD$ și opuse la vârf $\Rightarrow$ P, O, Q sunt coliniare	2p