COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
FAZA LOCALĂ A MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

Abstract. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2015, Bucharest.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.
Data: 16 februarie 2015.
Autor: Dan (*maledictus*) Schwarz, Bucureşti.

Confutatis maledictis [1]

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2015 a municipiului Bucureşti, reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Clasa a IX-a

Subiectul (1)**.**
a) Pe insula I trăiesc oameni cinstiţi – care spun totdeauna adevărul, şi mincinoşi – care totdeauna mint. Un explorator a întâlnit doi indigeni A, B.
Localnicul A a spus
– "Cel puţin unul dintre noi (A şi B) este mincinos."
Se poate stabili cum este A şi cum este B? (mincinos sau cinstit).
b) Arătaţi că: $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{2014}{2015!} < 1.$

prelucrare Ovidiu Şontea

Soluţie.
a) A nu poate fi mincinos, căci atunci locuţiunea sa este mincinoasă, ceea ce ar însemna că atât A cât şi B sunt oneşti; contradicţie. Deci $\boxed{A \text{ este onest}}$ şi atunci $\boxed{B \text{ este mincinos}}$.

[1] Confutatis maledictis, Requiem en Re menor, Wolfgang (Wolfie) Amadeus Mozart, `https://www.youtube.com/watch?v=UOm4paay7is`

[2] Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Nu pot oferi un link către enunţurile date şi soluţiile/baremele oficiale, căci nu au fost postate *nicăirea*.

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!} < 1$. O telescopare mai răsuflată ... mai rar de găsit! Soluţia oficială conţine o benignă eroare de tipar, folosind o dată K majuscul (ca indice de sumare), care imediat apoi însă devine k minuscul, ca peste tot în rest.

O îmbinare nefericită de două trivialităţi nelegate între ele. □

Subiectul (2)**.** *Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:*

$$x^2 + 2\lfloor x \rfloor \{x\} + 3\{x\}^2 = 4.$$

G.M.-B. nr. 6-7-8/2014

Soluţie. Avem, prin transformări elementare
$4 = x^2 + 2\lfloor x \rfloor \{x\} + 3\{x\}^2 = (\lfloor x \rfloor + \{x\})^2 + 2\lfloor x \rfloor \{x\} + 3\{x\}^2 = (\lfloor x \rfloor + 2\{x\})^2$. Prin urmare $\lfloor x \rfloor + 2\{x\} = \pm 2$, aşadar $\{x\} \in \{0, 1/2\}$, căci $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ şi $0 \le \{x\} < 1$. Sunt patru soluţii $\boxed{x \in \{-5/2, -2, 2, 3/2\}}$. □

Subiectul (4)**.** *Se consideră mulţimile:*

$A = \{5p+7q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$, $B = \{5p+7q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{35p+14q \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se determine $\mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus A)$ $|\mathbb{N} \setminus A|$.
b) Să se determine $\mathbb{Z} \setminus B$.
c) Să se determine mulţimea C.

***

Soluţie.
a) Soluţia oficială profită de valorile relativ mici 5 şi 7 pentru a ajunge prin calcularea de relativ puţine cazuri (dar fără detalii, cu doar un fel de *handwaving*) la rezultatul greşit 13.[3] De fapt este vorba de binecunoscutul rezultat al lui Sylvester (cunoscut în ţările anglo-saxone sub infamul nume de *Chicken McNugget Theorem*).[4] Acest rezultat afirmă că pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ co-prime, toate numerele naturale mai mari sau egale cu $(m-1)(n-1)$ sunt reprezentabile sub forma $mp + nq$, pentru anume $p, q \in \mathbb{N}$, iar dintre cele $(m-1)(n-1)$ numere naturale mai mici, exact jumătate sunt astfel reprezentabile. Aşadar $|\mathbb{N} \setminus A| = \dfrac{(5-1)(7-1)}{2} = \boxed{12}$. *À propos*, de ce $\mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus A)$, când $|\mathbb{N} \setminus A|$ este notaţia standard?

[3] Mi-este foarte clar de ce; din ceea ce scrie acolo, autorii soluţiei au omis faptul că $24 = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2$, găsind ”prin încercări succesive” ca prime cinci numere consecutive care se pot astfel reprezenta numerele $25, 26, 27, 28, 29$, şi apoi recurgând la inducţie de pas 5. Soluţia oficială numeşte asta ”varianta III a inducţiei matematice”, ceea ce este cel puţin comic. Oricum, metoda proastă de a ataca acest tip de problemă – căci pentru valori (mult) mai mari decât cele avute, calculele sunt oneroase. Mai tragic este faptul că ar fi trebuit să cunoască rezultatul pe care îl expun eu în continuare, care indică imediat că numărul $24 = (5-1)(7-1)$ era de fapt reprezentabil.

[4] `http://en.wikipedia.org/wiki/Coin_problem`

b) Având c. m. m. d. c.$(5, 7) = 1$, rezultă $\boxed{B = \mathbb{Z}}$ direct din relaţia lui Bézout (rezultat de manual, dar omis de a fi atribuit în soluţia oficială).

c) Având c. m. m. d. c.$(35, 14) = 7$, rezultă $\boxed{C = 7\mathbb{Z}}$ din relaţia lui Bézout. Soluţia oficială conţine de două ori afirmaţia $7\mathbb{Z} \subseteq C$, prima dată în mod eronat; ar fi trebuit scris $C \subseteq 7\mathbb{Z}$.

Sunt tare curios cum ar fi notată o soluţie care invocă rezultatul lui Sylvester, extrem de cunoscut în literatură şi în practica de concurs. Foarte probabil cu zero puncte ... nu-i aşa? □

2. CLASA A X-A

Subiectul (1)**.** *Fie funcţia* $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$*, dată prin*

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \text{ pentru orice } x \in [0, \infty).$$

a) Arătaţi că funcţia este strict monotonă.
b) Arătaţi că imaginea funcţiei este $(0, 1]$*.*
c) Determinaţi funcţia $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$ *care are proprietatea* $g(f(x)) = 2x+3$*, oricare ar fi* $x \in [0, \infty)$*.*

***

Soluţie.
a) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, deci funcţia este monoton (strict) descrescătoare (şi prin aceasta, injectivă).

b) $f(0) = 1$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, deci imaginea sa este intervalul $(0, 1]$, prin continuitate. Desigur, metode de clasa a XI-a, dar util de a fi menţionate; ce ne făceam dacă aveam $f(x) = \sqrt{x^5 + x + 1} - \sqrt{x^5 + x}$? Atunci imaginea lui f era tot $(0, 1]$, dar ecuaţia $f(x) = y$ nu mai ducea la o soluţie exprimabilă prin funcţii elementare, şi nici la o astfel de inversă f^{-1}. Sper că o astfel de abordare ar fi fost totuşi acceptată ca soluţie validă, dar ... cine ştie? Soluţia oficială procedează corect, în a rezolva ecuaţia $f(x) = y$ pentru orice $y \in (0, 1]$, cu soluţia (unică) $x = \left(\dfrac{1-y^2}{2y}\right)^2$.

c) Aşadar funcţia f este o bijecţie între $[0, \infty)$ şi $(0, 1]$. Pentru a rezolva $g(f(x)) = \varphi(x)$ cu $x \in [0, \infty)$ putem lua $x = f^{-1}(t)$ pentru un $t \in (0, 1]$, şi atunci $g(t) = \varphi(f^{-1}(t))$ (şi aceasta pentru orice funcţie φ, nu doar cea dată $2x + 3$). Ca "determinare", este suficient (să ne gândim iarăşi la cazul când inversa lui f nu ar fi exprimabilă prin funcţii elementare), dar aici chiar putem scrie $\boxed{g(t) = 2\left(\dfrac{1-t^2}{2t}\right)^2 + 3}$ pentru orice $t \in (0, 1]$. □

Subiectul (2)**.**
a) Fie z şi w două numere complexe diferite distincte, astfel încât $|z| = |w|$ şi $|1+z| = |1+w|$. Arătaţi că $z = \overline{w}$.
b) Arătaţi că dacă $z \neq \pm i$ este număr complex de modul 1, atunci $x = \dfrac{z}{z^2+1}$ este număr real.

Determinaţi mulţimea $\left\{ \dfrac{z}{z^2+1} \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ z \neq \pm i,\ |z| = 1 \right\}$.

suplimente *G.M.-B. nr. 4/2014* şi *11/2014*

Soluţie.
a) Considerăm cercul centrat în originea $(0,0)$, de rază $|z| = |w|$, şi cercul centrat în punctul $(-1,0)$, de rază $|1+z| = |1+w|$. Cele două puncte de intersecţie sunt cele de afixe z şi w, şi vor fi simetrice faţă de linia centrelor celor două cercuri, care este axa Ox, prin urmare $z = \overline{w}$. Soluţia oficială este algebrică, folosind $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ pentru un număr complex Z.

b) $x = \dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{\overline{z}z}{\overline{z}(z^2+1)} = \dfrac{1}{z+\overline{z}} \in \mathbb{R}$. Deşi la punctul a) autorul a folosit cu succes conjugatele, la punctul b) a obosit, şi în loc de soluţia elementară de mai sus recurge la scrierea $z = \cos a + \mathrm{i}\sin a$ şi (mici) calcule trigonometrice! Din păcate, oboseala devine atât de cronică încât autorul omite în enunţ să specifice în definiţia mulţimii că intenţiona tot $|z| = 1$ (după cum se vede din răspunsul $(-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty)$ oferit).[5] □

Subiectul (3)**.** *Arătaţi că $\left\lfloor \sqrt[3]{7n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{7n+5} \right\rfloor$ pentru orice număr natural n (unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real x).*

EUGEN RADU

Soluţie. Singurul caz contradictoriu ar fi dacă ar exista un număr natural k astfel încât $7n+1 < k^3 \leq 7n+5$. Dar resturile cubice modulo 7 sunt $\{0,1,6\}$, deci niciunul în $\{2,3,4,5\}$, aşadar un astfel de k nu poate exista.

Baremul oficial e neglijent scris; expresia ”nu există cuburi perfecte între $7n+1$ şi $7n+5$” poate fi înţeleasă $7n+1 \leq k^3 \leq 7n+5$, $7n+1 \leq k^3 < 7n+5$, $7n+1 < k^3 < 7n+5$, sau încă $7n+1 < k^3 \leq 7n+5$. Primele două cazuri sunt evident posibile, dar după cum se vede mai sus, singurul caz relevant este ultimul. Ceea ce nu este relevant este problema, în totalitatea ei. □

Subiectul (4)**.** *Rezolvaţi ecuaţia $2^x + 1 = (3^x - 1)^{\log_2 3}$.*

EUGEN RADU

[5] Desigur, $\dfrac{z}{z^2+1}$ nu mai este totdeauna număr real dacă nu se ştie că $|z| = 1$. O altă necunoscută este condiţia $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, care pentru $|z| = 1$ interzice doar $z = \pm 1$, şi are ca efect direct eliminarea valorilor $\pm 1/2$ din mulţimea cerută. *Mystère et boule de gomme ...* poate autorul a crezut că $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este echivalent cu $|z| = 1$?

Soluţie. Domeniul $x \geq 0$ este forţat de faptul că exponentul $\log_2 3$ este iraţional, deci puterea de acest exponent nu este (bine) definită pentru baze negative. Cum $x = 0$ nu este soluţie, ecuaţia se transformă imediat în forma echivalentă $\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1)$. Pentru valoarea v comună, putem scrie $2^x + 1 = 3^v$ şi $3^x - 1 = 2^v$, de unde $2^x + 3^x = 2^v + 3^v$. Dar funcţia $t \mapsto 2^t + 3^t$ este sumă de două funcţii crescătoare, deci crescătoare, ceea ce forţează $v = x$. Atunci $2^x + 1 = 3^x$, sau $(2/3)^x + (1/3)^x = 1$, cu membrul stâng funcţie descrescătoare, deci cu cel mult o soluţie reală. Cum $\boxed{x = 1}$ verifică, aceasta este soluţia unică.

Sigur, ecuaţia în sine presupune că lucrăm în numere reale, dar la clasa a IX-a nu ne-am sfiit la Subiectul 2 să specificăm acest lucru. O minimă coerenţă ar trebui păstrată. □

3. CLASA A XI-A

Subiectul (1)**.** *O matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *are proprietăţile*

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} \text{ şi } A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix}.$$

Arătaţi că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$, *oricare ar fi numărul natural nenul* n.

***

Soluţie. Fie $\Delta = \det A = ad - bc$ şi $t = \operatorname{tr} A = a + d$. Atunci ecuaţia Hamilton-Cayley se scrie $A^2 - tA + \Delta I_2 = 0$, de unde, identificând elementele matricelor, $bc = 0$ şi $b(a + d - b) = 0 = c(a + d - c)$. Rezultă cazurile

• $b = c = 0$, deci $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Atunci avem şi $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$;

• $c = 0 \neq b = a + d$ (din simetrie, fără a restrânge generalitatea), deci $A = \begin{pmatrix} a & a+d \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Dar atunci avem şi $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & (a+d)^3 - ad(a+d) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix}$, şi aici este primul moment în care apare condiţia asupra lui A^3, care forţează $ad(a + d) = 0$, deci $ad = 0$. Fie $d = 0$ (din simetrie, fără a restrânge generalitatea), şi deci $A = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci avem şi $A^n = a^n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

• $0 \neq b = a + d = c$ nu duce nicăieri, căci $bc = 0$ face acest lucru imposibil.

Prin urmare, am reuşit nu numai să demonstrăm că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi numărul natural nenul n, dar chiar să găsim toate posibilităţile, anume (grupând soluţiile de mai sus)

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},\ A = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = x\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

pentru orice valori reale x şi/sau y.

Soluţia oficială este puţin neglijent scrisă, conţinând la un moment dat soluţia $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, în condiţiile în care puţin mai înainte se declarase $\boldsymbol{b=0}$; expresia dorită trebuia să fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Oricum, şi acolo se obţin toate cazurile posibile; deci concluzia cerută este doar un moft, din moment ce pentru a ajunge la ea de fapt găsim toate formele posibile pentru A. Un alt exemplu de *understatement*. $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}^*$, şi matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care are loc relaţia:*

$$A^{4k+1} = A^{4k-1} + A^{4k-2} + \cdots + A + I_n.$$

Demonstraţi că:

a) A este inversabilă.
b) $\det(A + I_n) \geq 0$.

***

Soluţie.
a) Desigur

$$(A - I_n)A^{4k+1} = (A - I_n)(A^{4k-1} + A^{4k-2} + \cdots + A + I_n) = A^{4k} - I_n,$$

deci $A^{4k}(I_n + A - A^2) = I_n$, aşadar $\det A \neq 0$.

b) Relaţia de mai sus se scrie şi $(A + I_n)A^{4k} = A^{4k+2} + I_n$, dar ştim de la punctul a) că $\det A \neq 0$, deci $\det(A + I_n)$ are semnul lui $\det(A^{4k+2} + I_n)$. Notând $X = A^{2k+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, este arhicunoscut că $\det(X^2 + I_n) \geq 0$ (se scufundă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se factorizează $X^2 + I_n = (X + \mathrm{i}I_n)(X - \mathrm{i}I_n)$, se iau determinanţii, conjugatele, etc.).

Soluţia oficială complică oarecum (nejustificat) punctul b), lucrând cu rădăcinile complexe de ordin $4k + 1$ ale unităţii (dar trecând prin aceleaşi manevre de conjugare, etc.). Un detaliu caraghios, dar neplăcut ochiului; rădăcinile ε_k sunt indexate cu aceeaşi literă k ca şi cea, fixată, din enunţ, precizându-se, evident, $1 \leq k \leq 4k$. Iar condiţia $n \geq 2$ este prea restrictivă; ce este rău cu $n \in \mathbb{N}^*$? $\square$

Subiectul (4)**.** *Fie $n \geq 2$ un număr natural, şi $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Precizaţi, justificând răspunsul, dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a) oricare ar fi f, dacă $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\sin nx = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\sin x = 0$;
b) oricare ar fi f, dacă $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)\sin x = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)\sin nx = 0$;
c) oricare ar fi f, dacă $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)\sin nx = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)\sin x = 0$.

MIHAIL BĂLUNĂ

Soluţie.
a) Prima afirmaţie este de fapt o echivalenţă, căci vom putea imediat invoca $\lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{\sin x} = n \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin nx}{nx}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right) = n$.
b) Afirmaţia a doua este demonstrată în soluţia oficială prin inegalitatea $|\sin nx| \leq n|\sin x|$ (care iese uşor prin inducţie). Altfel, se poate demonstra uşor (de exemplu prin formula lui de Moivre) că $\sin nx = \sin x P(\cos x)$, unde P este polinom. Dar atunci $\lim_{x\to\infty} f(x)\sin nx = \lim_{x\to\infty} (f(x)\sin x)P(\cos x) = 0$, evident.

c) Afirmaţia a treia este falsă. Este suficient să găsim o mulţime nemărginită superior $R \subseteq \mathbb{R}$ cu proprietatea $\sin nx = 0$ pentru $x \in R$, astfel încât pentru $f(x) = \chi_R(x)$ să avem $f(x)\sin nx \equiv 0$, dar, de exemplu, $\sin x$ să fie constant nenul pentru $x \in R$, şi atunci $f(x)\sin x$ nu există. Putem lua, de exemplu, $R = \frac{\pi}{n} + 2\pi\mathbb{Z}$ (şi aici este singurul loc unde condiţia $n \geq 2$ este necesară). □

4. CLASA A XII-A

Subiectul (1)**.** *Fie* $f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ *un endomorfism al grupului* $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$*.*
a) Determinaţi $f(-1)$*.*
b) Să se determine toate endomorfismele f *cu proprietartea că* $f(p) = p$*, pentru orice* $p > 0$*,* p *număr prim.*

MARCEL ŢENA

Soluţie.
a) Avem $f(-1)f(-1) = f((-1)(-1)) = f(1) = 1$ şi deci $f(-1) = \pm 1$. Cum atât $f(x) = x$ cât şi $f(x) = |x|$ sunt endomorfisme, ambele valori pot fi luate. Eu credeam că ”a determina” are o conotaţie mai strictă ... era poate mai potrivit să se ceară ”găsirea” tuturor valorilor posibile ale lui $f(-1)$.

b) Din moment ce orice număr raţional pozitiv se scrie drept produs de numere prime distincte la exponenţi întregi, iar orice endomorfism comută cu produsele, rezultă $f(r) = r$ pentru orice $r \in \mathbb{Q}^*_+$. Cum atunci avem şi $f(-r) = f(-1)f(r) = f(-1)r$, în conformitate cu punctul a) putem avea doar $\boxed{f(x) = x}$ sau $\boxed{f(x) = |x|}$ (exact cele două exemple date mai sus).

Soluţia oficială este neglijent scrisă. Suferă din folosirea lui $\mathbb{Q}^*$ când era evident intenţionat a se utiliza $\mathbb{Q}^*_+$; apoi admite valorile $f(-1) = \pm 1$ direct din operaţiile algebrice, fără a şi verifica faptul că ambele valori sunt permise (acest lucru este parţial ”reparat” la sfârşit, când cel două endomorfisme posibile sunt construite); în fine, jonglează cu simboluri nedeclarate, precum q şi r. Problema este remarcabil de trivială, endomorfismele f fiind ”fixate” peste $\mathbb{Q}^*_+$, cu singura variaţie posibilă dată prin valoarea în punctul -1. □

Subiectul (2)**.** *Fie a un număr real fixat şi fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive şi nu se anulează. Să se arate că funcţia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin* $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq a \\ 2f(x), & x > a \end{cases}$, *nu are primitive.*

G.M.-B. nr. 9/2014

Soluţie. Dacă F este o primitivă a lui f, şi dacă g ar avea primitive, fie G o primitivă a lui g astfel încât $G(a) = F(a)$. Dar G fiind primitivă şi a lui f pe $(-\infty, a]$, rezultă $G(x) = F(x)$ pentru $x \leq a$. G fiind primitivă a lui $2f$ pe (a, ∞), din continuitatea lui G în a rezultă $G(x) = 2F(x) - F(a)$ pentru $x \geq a$. Egalând derivatele laterale ale lui G în a obţinem $F'(a) = 2F'(a)$, adică $f(a) = 2f(a)$, absurd când $f(a) \neq 0$.

În loc de greoaia expresie care nu se anulează, nu era mai simplu să se dea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$? Oricum nu contează decât că $f(a) \neq 0$, dar este deja tradiţional să "mascăm" acest lucru, printr-o condiţie prea laxă, nu cumva să nu creadă concurenţii că $f(x) = 0$ în afara lui a ar putea avea vreo însemnătate. ☐

Subiectul (4)**.**
a) Pe mulţimea $A = \left\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[145]{145}\right\}$ să se introducă două structuri: una de grup comutativ şi una de grup necomutativ.
b) Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, şi notăm $H = (a, b)$. Să se introducă pe H o structură de grup comutativ.

***

Soluţie. Este trivial faptul că dacă $(G, \circ)$ este un grup, iar X este o mulţime amorfă, şi dacă există o bijecţie $\varphi\colon X \to G$, atunci se poate introduce în mod canonic o structură de grup $(X, *)$ prin $x * y = \varphi^{-1}(\varphi(x) \circ \varphi(y))$ pentru $x, y \in X$, iar φ este un izomorfism de grupuri. Este numitul *transport de structură*.

a) Este înduioşătoare "grija" în a construi mulţimea A; evident orice mulţime cu 144 de elemente lucrează la fel.[6] Fie deci o mulţime X cu $|X| = 144$. Pentru structura de grup abelian, o putem folosi pe cea a grupului ciclic C_{144}, de exemplu în versiunea sa aditivă $(\mathbb{Z}_{144}, +)$, transportată prin orice bijecţie $\varphi\colon X \to C_{144}$.[7]

[6] Ha, ha; poate intenţia a fost de a "păcăli" lumea în a crede că este o mulţime cu **145** de elemente, cum am crezut chiar eu pentru câteva secunde! **Din păcate, nici 144 de elemente nu are! ... citiţi mai departe ...**

[7] Deoarece $144 = 2^4 \cdot 3^2$, nu orice grup abelian cu 144 de elemente este ciclic, de exemplu $C_2^4 \times C_3^2$. Lacrimile de înduioşare continuă să-mi curgă. Soluţia oficială **chiar construieşte** o astfel de "bijecţie", prin $f\left(\sqrt[k]{k}\right) = \widehat{k-2} \in \mathbb{Z}_{144}$ pentru $2 \leq k \leq 145$ (dar îşi pierde repede suflul, şi nu mai produce un exemplu efectiv de bijecţie şi pentru cazul necomutativ). **Dar ... citiţi mai departe ...**

Pentru structura de grup necomutativ, trebuie să găsim un model canonic; acestea sunt multe, de exemplu grupul diedral $D_{2\cdot 72}$, sau un grup $Q_8 \times C_{18}$, unde Q_8 este grupul cuaternionilor (8 elemente, necomutativ), sau $\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_4$, sau altele.
b) Putem lua de exemplu bijecţia $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ dată prin

$$\varphi(x) = \tan \frac{2x-(a+b)}{2(b-a)}\pi,$$

şi transporta structura $(\mathbb{R},+)$ de grup abelian, dar acesta este un exerciţiu în futilitate, căci atât (a,b) cât şi $\mathbb{R}$ au cardinalitatea $\mathfrak{c}$ a continuum-ului, şi existenţa unei bijecţii este garantată.

Momentul duioşiei a trecut! Aberaţia de a construi mulţimea A aşa cum a fost ea construită, ca să se ofere o "bijecţie" oareşicum "canonică" (dar irelevant de inutilă), s-a răzbunat împotriva propriilor săi autori, ca un şarpe care muşcă mâna *snakecharmer*-ului. N-a văzut nimeni că $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, şi că de fapt mulţimea A nu are decât **143** de elemente.[8] Totul ar fi putut încă fi muşamalizat, dacă cerinţa rămânea posibil de îndeplinit; din păcate grupuri necomutative cu 143 de elemente nu există! Aceasta pentru că $143 = 11 \cdot 13$, şi structura factorilor săi primi nu permite construcţia unui grup necomutativ prin procedeul clasic de produs semi-direct.

Ciudată alegerea acestei probleme ca Problemă 4; este practic trivială (în absenţa erorii de cardinalitate). Mai bine că este fără autor ... □

Subiectele clasei a XII-a au fost de data aceasta cu totul banale (de obicei ele erau de bună calitate, dar ceva mai grele decât cele ale celorlalte clase).

O omisiune caraghioasă. La clasele a X-a şi a XI-a, pe foaia de concurs apare, ca la toate clasele, inutila exhortaţie **Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete**, dar apoi, după **Timp de lucru**, este o lacună.

5. ÎNCHEIERE

Dinu Şerbănescu îmi semnalează o chestiune comună subiectelor 4 de la clasa a XI-a şi 1 de la clasa a XII-a. Când spunem "fie ...", obiectul este arbitrar, dar fixat. De exemplu, la subiectul 4 de la clasa a XI-a, $n \geq 2$ este fixat, deci şi funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ar trebui să fie. Cum atunci punctele a), b) şi c) încep prin "oricare ar fi f"? Iar la subiectul 1 de la clasa a XII-a, endomorfismul $f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ este deci fixat. Cum atunci, la punctul b), să determinăm "toate endomorfismele f care ..."? (chiar şi punctul a) este dubios, după cum am comentat şi mai sus, căci $f(-1)$, pentru un endomorfism fixat, este fixat şi el). În enunţurile tipice cu ecuaţii funcţionale, cerinţa este prin tradiţie "determinaţi toate funcţiile f ...", ceea ce nu se mai pretează la confuzii.

[8] Funcţia $x \mapsto x^{1/x}$ nu este injectivă pe $[1,\infty)$; perechea $(2,4)$ este singura de întregi pentru care se iau valori egale.

Ca şi într-un alt an (trecut), etapa locală a Municipiului Bucureşti a Olimpiadei Naţionale de Matematică s-a desfăşurat într-o zi de duminică, 15 februarie 2015; regina ştiinţelor nu şi-a asigurat din timp ziua de sâmbătă – reclamată de Olimpiada de Fizică – şi a trebuit să se mulţumească cu un timp de mâna a doua (o şiră a spinării demnă de o nevertebrată meduză ...).

În anii trecuţi, SSMR avea bunul obicei să posteze o hartă a României, cu link-uri pentru fiecare judeţ către problemele şi soluţiile lor oficiale ale Fazei Locale de acolo. Văd că s-a renunţat (cel puţin la momentul scrierii acestor comentarii) la această idee – păcat!

Foile de concurs şi soluţiile oficiale sunt scrise într-un hibrid de LaTeX, mult mai bun decât mai vechile materiale în WORD, dar care încă, uneori, produce efecte estetice neplăcute. Vom ajunge, poate, odată, la o versiune ireproşabilă.

Calitatea etapei locale a Municipiului Bucureşti se ameliora faţă de un trecut nu foarte îndepărtat, dar acum este iarăşi în declin. Au fost prea multe scăpări şi erori (în enunţuri şi soluţii), iar cele mai multe probleme au rămas destul de neatractive. Din 12 probleme (în afara celor patru culese din gazetă), 7 sunt semnate ***, ceea ce de obicei indică imposibilitatea atribuirii lor, dar aici este un semn de "creaţie" *ad-hoc*, în grabă, din amintiri, de o calitate îndoielnică.

O remarcă finală *scoop* "de ultima oră". Site-ul `http://www.cncv.ro/` al liceului Cantemir, care afişează unele dintre rezultate, numeşte acest fişier "**Rezultate** ...". Foamea (de litere) este endemică.