Olimpiada Naţională de Matematică
- etapa locală – 16 februarie 2014
Clasa a V-a

Varianta 2

SUBIECTE:

1. Fie numerele $x = 2011 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 2010)$ şi $y = 1 + 3 + 5 + ... + 2011$

a) Să se arate că x şi y sunt pătrate perfecte.

b) Să se arate că $2011 + x < 4 \cdot y$.

(7puncte)

2. Să se demonstreze că numărul $x = 2^n \cdot 5^{3n} - 2^{4n} \cdot 5^n + 6^n \cdot 13^{2n} - 3^{3n} \cdot 13^n$ se divide cu 17 oricare ar fi $n \in N^*$.

(7puncte)

3. Aflaţi numerele naturale de forma $\overline{ab}$ care împărţite la 36 dau restul un pătrat perfect.

(7puncte)

E:14178 din GM 11/2011

4. Într-o urnă sunt bile albe, roşii şi verzi. Ştiind că numărul bilelor albe este cu 35 mai mare decât al celor roşii, numărul celor roşii este de trei ori mai mic decât al celor verzi, iar numărul celor verzi este cu 19 mai mare decât al celor albe, determinaţi câte bile de fiecare culoare sunt în urnă.

(7puncte)

E:14379 din GM 3/2013

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Olimpiada Naţională de Matematică
- etapa locală – 16 februarie 2014
Clasa a V-a

Varianta 2

BAREM de CORECTARE şi NOTARE:

1. SOLUŢIE

a) $x = 2011 + 2010 \cdot 2011$ 2p

$x = 2011^2 \Rightarrow$ x este pătrat perfect 1p

$y = \left(\frac{2011+1}{2}\right)^2 \Rightarrow y = 1006^2 \Rightarrow$ y este pătrat perfect 1p

b) $2011 + 2011^2 < 4 \cdot 1006^2 \Leftrightarrow$ 1p

$2011 \cdot 2012 < 2^2 \cdot 1006^2 \Leftrightarrow$ 1p

$2011 \cdot 2012 < (2 \cdot 1006)^2 \Leftrightarrow 2011 \cdot 2012 < 2\,012^2$ (A) 1p

2. SOLUŢIE

$x = 2^n \cdot 5^n\ (5^{2n} - 2^{3n}) + 3^n \cdot 13^n\ (2^n \cdot 13^n - 3^{2n})$ 2p

$x = 2^n \cdot 5^n\ (25^n - 8^n) + 3^n \cdot 13^n\ (26^n - 9^n)$ 2p

$a^n - b^n = M(a - b)$ 1p

$x = 10^n \cdot M(25 - 8) + 39^n \cdot M(26 - 9)$ 1p

$x = M17 \Leftrightarrow 17/x$ 1p

3. SOLUŢIE

$\overline{ab} = 36 \cdot c + r.\ 0 \leq r < 36$ şi r este un pătrat perfect 1p

$\Rightarrow r \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ 1p

$36 \cdot c \leq \overline{ab} \Rightarrow c \in \{0, 1, 2\}$ 1p

Obţinem numerele: 16, 25, 36, 37, 40, 45, 52, 61, 72, 73, 76, 81, 88, 97. .... 4p

4. SOLUŢIE

Notăm cu a numărul bilelor albe, cu r numărul bilelor roşii si cu v numărul bilelor verzi.

$a = r + 35$ 1p

$v = 3r$ 1p

$v = a + 19 \Rightarrow v = r + 35 + 19 = r + 54$ 1p

$3r = 3 + 54 \Rightarrow r = 27;\ a = 62;\ v = 81$ 3p

Finalizare 1p

Notă:

Orice altă soluţie se punctează corespunzător.