Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a VI-a

Problema 1. Se consideră numărul natural n care împărţit la 10 dă restul 4 şi împărţit la 7 dă restul 5.

a) Arătaţi că $n+2$ se divide cu 14;

b) Arătaţi că numărul $2013^n - 1$ este divizibil cu 2014.

G.M 9/2013

Problema 2. Determinaţi numerele naturale prime p şi q ştiind că există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p = x^2 + y^2$ şi $q = x + y + 1$.

***

Problema 3. Considerăm numerele naturale nenule a, b şi c.

a) Dacă $(a, c) = (b, c)$ şi $[a, c] = [b, c]$, atunci $a = b$,

b) Să se arate că $(a, b) + [a, b] \geq a + b$,

unde $(a, b) = cmmdc(a, b)$ şi $[a, b] = cmmmc(a, b)$.

***

Problema 4. Pe laturile unui unghi ascuţit $\widehat{XOY}$ considerăm punctele distincte $A, A' \in (OX$, respectiv $B, B' \in (OY$, astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ şi $[OA'] \equiv [OB']$. Dreptele AB' şi BA' se intersectează în punctul I. Să se arate că (OI este bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$.

***

Notă:

Timp de lucru: 2 ore;

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 7.

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VI-a
Craiova, 16 februarie 2014

Problema 1. Se consideră numărul natural n care împărţit la 10 dă restul 4 şi împărţit la 7 dă restul 5.

a) Arătaţi că $n+2$ se divide cu 14;

b) Arătaţi că numărul $2013^n - 1$ este divizibil cu 2014.

G.M 9/2013

Soluţie. Din teorema împărţirii cu rest avem $n = 10c_1 + 4 = 7c_2 + 5$. De aici deducem că n este par(deci $n+2$ este par) şi $n+2 = 7(c_2+1)$. Cum $(2,7) = 1$ rezultă că $14 \mid n+2$, ceea ce se cerea la punctul a).

b) Scriem $2013^n - 1 = (2014-1)^n - 1 = M_{2014} + 1 - 1 = M_{2014}$ deoarece n este număr par.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale prime p şi q ştiind că există $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p = x^2 + y^2$ şi $q = x + y + 1$.

***

Soluţie. Din $x, y \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $q \geq 3$, deci q este un număr prim impar. Deducem astfel că x, y sunt simultan pare sau impare, ceea ce face ca p să fie număr par, adică $p = 2$. Ecuaţia $2 = x^2 + y^2$ nu are decât soluţia $x = y = 1$, astfel că $q = 3$.

Problema 3. Considerăm numerele naturale nenule a, b şi c.

a) Dacă $(a,c) = (b,c)$ şi $[a,c] = [b,c]$, atunci $a = b$,

b) Să se arate că $(a,b) + [a,b] \geq a + b$,

unde $(a,b) = cmmdc(a,b)$ şi $[a,b] = cmmmc(a,b)$.

***

Soluţie. a) Ştim că $ac = (a,c) \cdot [a,c]$ şi analog $bc = (b,c) \cdot [b,c]$. Atunci, conform ipotezei, rezultă $ac = bc$, adică $a = b$.

b) Fără a restrânge generalitatea, putem considera $a \leq b$ şi distingem două cazuri: $a \mid b$ şi $a \nmid b$. Dacă $a \mid b$ atunci $(a,b) = a, [a,b] = b$, deci vom avea egalitate. Pentru cazul doi, scriem $[a,b] = bm$ cu $m \in \mathbb{N}^*$. Din $a \nmid b$ deducem că $m \neq 1$, deci $m \geq 2$. Atunci $(a,b) + [a,b] \geq (a,b) + 2b > a + b$(deoarece $(a,b) \geq 1$).

Problema 4. Pe laturile unui unghi ascuţit $\widehat{XOY}$ considerăm punctele distincte $A, A' \in (OX$, respectiv $B, B' \in (OY$, astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ şi $[OA'] \equiv [OB']$. Dreptele AB' şi BA' se intersectează în punctul I. Să se arate că (OI este bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$.

***

Soluţie. Se disting două cazuri: $A \in (OA'), B \in (OB')$, respectiv $A' \in (OA), B' \in (OB)$.

În primul caz avem $\Delta AOB' \equiv \Delta BOA'$(LUL)de unde deducem că $\widehat{AA'I} \equiv \widehat{BB'I}$(1). Din $[OA] \equiv [OB]$ şi $[OA'] \equiv [OB']$ rezultă că $[AA'] \equiv [BB']$(2). Din (1), (2) şi faptul că $\widehat{AIA'} \equiv \widehat{BIB'}$ (fiind opuse la vârf) deducem că $\Delta AIA' \equiv \Delta BIB'$(UUL). De aici rezultă că $[AI] \equiv [BI]$ şi astfel $\Delta AOI \equiv \Delta BOI$(LLL), ceea ce arată că (OI este bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$. Cazul al doilea se tratează analog.

BAREM clasa a VI a

Problema 1.

Oficiu 1p

$n = 10c_1 + 4 = 7c_2 + 5$ 1p

n este par 0.5p

a) $n + 2$ este par 0.5p

$n + 2 = 7(c_2 + 1) \Rightarrow 7 \mid n + 2$ 0.5p

$(2, 7) = 1 \Rightarrow 14 \mid n + 2$ 1p

b) $2013^n - 1 = (2014 - 1)^n - 1$ 1p

n par $\Rightarrow 2013^n - 1 = M_{2014}$ 1.5p

Total **7p**

Problema 2.

Oficiu 1p

$x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow q \geq 3$ 1p

q este un număr prim impar 0.5p

x, y sunt simultan pare sau impare 1p

$p = 2$ 1p

$2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = y = 1$ 1.5p

$q = 3$ 1p

Total **7p**

Problema 3.

Oficiu 1p

a) $ac = (a, c) \cdot [a, c]$, $bc = (b, c) \cdot [b, c]$ 1p

$ac = bc \Rightarrow a = b$ 0.5p

b) Considerăm $a \leq b$ 0.5p

$a \mid b \Rightarrow (a, b) = a, [a, b] = b \Rightarrow$ egalitate 1.5p

$a \nmid b \Rightarrow [a, b] = bm$ cu $m \in \mathbb{N}^*$ 0.5p

$m \geq 2$ 1p

$(a, b) + [a, b] \geq (a, b) + 2b > a + b$ 1p

Total **7p**

Problema 4.

Oficiu 1p

a)Cazul $A \in (OA'), B \in (OB')$

$\Delta AOB' \equiv \Delta BOA'$(LUL) 1p

$\widehat{AA'I} \equiv \widehat{BB'I}$ 0.5p

$[AA'] \equiv [BB']$ 1p

$\Delta AIA' \equiv \Delta BIB'$(UUL) 1p

$[AI] \equiv [BI]$ 0.5p

$\Delta AOI \equiv \Delta BOI$(LLL) 1p

(OI este bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$ 0.5p

b)Cazul $A' \in (OA), B' \in (OB)$ -analog 0.5p

Total **7p**