Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a XII- a

Subiecte :

1. Se consideră mulțimea $G = (1, \infty)$ și funcția $f: G \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - 1$. Determinați o lege de compoziție ,,$*$'' definită pe G astfel încât $(G,*)$ să fie grup, iar funcția f să fie izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

2. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$.

3. Să se determine submulțimile A ale lui $\mathbb{Z}_6$ cu proprietatea că A are trei elemente și există o funcție $f: A \to A, f(x) = x + a, a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{\hat{0}\}$.

Prof. Bene Marius, Alexandria

4. Fie $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{2t+1} dt.$

   a) Calculați $f(1)$.
   b) Arătați că $2f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}$, pentru orice $x \in [1, \infty)$.
   c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} x f(x)$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru : 3 ore .
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Barem cls. a XII-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1. f bijectivă deci inversabilă. Din $f(x*y)=f(x)f(y)=xy-x-y+1$ rezultă
$x*y=f^{-1}(xy-x-y+1)$…………………………………………………………3 p
Din $f(x)=x-1$ rezultă $f^{-1}(x)=x+1$ și $x*y=xy-x-y+2, x,y\in G$ ….………2 p
Se verifică faptul că $(G,*)$ este grup. ……………………………………………………… 2 p

2. Notând $\frac{\pi}{2}-x=t$ și $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x+\sin x}{\sin x+\cos x+1}dx$ rezultă $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t+\cos t}{\cos t+\sin t+1}dt=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t-\sin t+\cos t+\sin t}{\cos t+\sin t+1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos t+\sin t-\sin^2 t-\sin t}{\cos t+\sin t+1}dt$……………3 p

Deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos t+\sin t-\sin^2 t-\sin t}{\cos t+\sin t+1}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin^2 t+\sin t}{\sin t+\cos t+1}\right)dt=\frac{\pi}{2}-I,$

$2I=\frac{\pi}{2}, I=\frac{\pi}{4}$ ………………………………………………………………….4 p

3. $A=\{x_1, x_2, x_3\}, f:A\to A, f(x)=x+a$ este injectivă
A finită rezultă f bijectivă și $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=x_1+x_2+x_3$………3 p
$x_1+x_2+x_3+\hat{3}a=x_1+x_2+x_3$, deci $\hat{3}a=\hat{0}, a\in\mathbb{Z}_6\setminus\{\hat{0}\}$,
rezultă $a\in\{\hat{2},\hat{4}\}$. Pentru $a=\hat{2}, f(x)=x+\hat{2}$, va rezulta $A=\{\hat{0},\hat{2},\hat{4}\}$ și
$A=\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}$, iar pentru $a=\hat{4}, f(x)=x+\hat{4}$, va rezulta $A=\{\hat{0},\hat{2},\hat{4}\}$ și
$A=\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}$ ………………………………………………………………….4 p

4. a) $f(1)=\int_0^1\frac{t}{2t+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t}{2t+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\frac{1}{2t+1})dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln 3$………………………2 p

b) $2f(x+1)+f(x)=\int_0^1\frac{2t^{x+1}+t^x}{2t+1}dt=\int_0^1 t^x\,dt=\frac{1}{x+1}$ ………………………………..2 p

c) Funcția $g(x)=\frac{t^x}{2t+1}, t\in(0,1)$ este strict descrescătoare pe $[1,\infty)$

Va rezulta $f(x+1)<f(x)$ și, folosind relația de la b) , $\frac{1}{x+1}<3f(x)$………………….. 1 p
Pentru $x\geq 2$, din $2f(x)+f(x-1)=\frac{1}{x}$ și $f(x-1)>f(x)$ rezultă $\frac{1}{x}>3f(x)$,

$\frac{1}{3(x+1)}<f(x)<\frac{1}{3x}$ și $\lim_{x\to\infty}xf(x)=\frac{1}{3}$…………………………………… 2 p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro