BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Determinaţi partea întreagă a numărului $x=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+......+\frac{1}{2013^2}$.

Prof. Andronic Aurica Mihaela

Soluție: Se observă că fiecare termen al sumei verifică: $\frac{1}{2\cdot3}<\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot2}$;
$\frac{1}{3\cdot4}<\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot3}$; $\frac{1}{4\cdot5}<\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot4}$;………… $\frac{1}{2013\cdot2014}<\frac{1}{2013^2}<\frac{1}{2012\cdot2013}$. Se adună inegalităţile şi se obţine:

$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+......+\frac{1}{2013\cdot2014}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{2013^2}<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+....+\frac{1}{2012\cdot2013}$ Deci, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+......+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{2013^2}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}$. De unde rezultă: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2014}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{2013^2}<1-\frac{1}{2013}\Rightarrow\frac{1006}{2014}<x<1-\frac{1}{2013}\Rightarrow 0\le x<1\Rightarrow[x]=0$.

Barem:

$\frac{1}{2\cdot3}<\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot2};\frac{1}{3\cdot4}<\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot3};\frac{1}{4\cdot5}<\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot4};\ldots;\frac{1}{2013\cdot2014}<\frac{1}{2013^2}<\frac{1}{2012\cdot2013}$	**2 p**
$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+......+\frac{1}{2013\cdot2014}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{2013^2}<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+....+\frac{1}{2012\cdot2013}$	**1 p**
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2014}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{2013^2}<1-\frac{1}{2013}$	**2 p**
$\frac{1006}{2014}<x<1-\frac{1}{2013}\Rightarrow 0\le x<1$	**1 p**
$[x]=0$	**1 p**

2. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{aba}$, scrise în sistemul zecimal, cu proprietatea:

$$\sqrt{\overline{aba}}=\frac{a^2}{3}+2b.$$

b) Deteminați numărul natural nenul x cu proprietatea:

$$\sqrt{(1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot x)^2+13}\in\mathbb{N}.$$

Soluție: a) Cum a și b sunt cifre, $a\neq0$, avem $\frac{a^2}{3}+2b\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{\overline{abc}}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\overline{abc}=n^2,n\in\mathbb{N}$. Deci

$\frac{a^2}{3}+2b\in\mathbb{N}\Rightarrow 3/a^2$, iar 3 este număr prim, rezultă $a=3k,k\in\mathbb{N}$. Avem: $a\in\{3,6,9\}$. Pentru $a=3$ avem

$\sqrt{\overline{3b3}}=2b+3$, iar singurele pătrate perfecte între 300 și 400 sunt $18^2=324$ și $19^2=361$ care nu verifică. Pentru $a=6$, avem $\sqrt{\overline{6b6}}=2b+12$, iar pătratele perfecte între 600 și 700 sunt $25^2=625$ și $26^2=676$. Se verifică $\overline{aba}$=676. Pentru a=9, avem $\sqrt{\overline{9b9}} = 2b + 27$, iar pătratul perfect între 900 și 999 este $31^2 = 961$ care nu verifică.

b) $\sqrt{(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x)^2 + 13} \in \mathbb{N} \Rightarrow (1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x)^2 + 13$ este pătrat perfect. Cum restul împărțirii unui pătrat perfect la 5 este 0, 1 sau 4, pentru $x \geq 5$, numărul $(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x)^2 + 13$ nu este pătrat perfect deoarece are restul împărțirii la 5 egal cu 3. Rămân de analizat cazurile $x \in \{1,2,3,4\}$. Singurul caz care verifică este $x = 3$.

Barem:

a) *a* și *b* sunt cifre, $a \neq 0$, avem $\frac{a^2}{3} + 2b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{\overline{abc}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{abc} = n^2, n \in \mathbb{N}$ $\frac{a^2}{3} + 2b \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 / a^2$, iar 3 este număr prim, rezultă $a = 3k, k \in \mathbb{N}$. Avem: $a \in \{3,6,9\}$	**1p**
Pentru $a = 3$ avem $\sqrt{\overline{3b3}} = 2b + 3$, iar singurele pătrate perfecte între 300 și 400 sunt $18^2 = 324$ și $19^2 = 361$ care nu verifică	**1 p**
Pentru $a = 6$, avem $\sqrt{\overline{6b6}} = 2b + 12$, iar pătratele perfecte între 600 și 700 sunt $25^2 = 625$ și $26^2 = 676$. Se verifică $\overline{aba}$=676.	**1 p**
Pentru a=9, avem $\sqrt{\overline{9b9}} = 2b + 27$, iar pătratul perfect între 900 și 999 este $31^2 = 961$ care nu verifică.	**1 p**
b) restul împărțirii unui pătrat perfect la 5 este 0, 1 sau 4	**1 p**
pentru $x \geq 5$, numărul $(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x)^2 + 13$ nu este pătrat perfect deoarece are restul împărțirii la 5 egal cu 3	**1 p**
Rămân de analizat cazurile $x \in \{1,2,3,4\}$. Singurul caz care verifică este $x = 3$.	**1 p**

3. Fie trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ, MN < PQ$ și punctele B, C picioarele perpendicularelor duse din M, respectiv P, pe dreapta NQ. Arătați că $\triangle ABC$ este triunghi isoscel, unde A este mijlocul segmentului MP.

Prof. Alexandru Elena-Marcela

Soluție: Fie $AD \perp NQ, D \in NQ$. Cum $MB \perp NQ$ și $PC \perp NQ$ avem $MB \parallel AD \parallel PC$. În $\triangle OPC$, unde $\{O\} = QN \cap MP$, $AD \parallel PC$, conform teoremei lui Thales avem: $\frac{OA}{AP} = \frac{OD}{DC}$ (1). Cum $MB \parallel AD$, conform teoremei lui Thales avem: $\frac{OA}{OM} = \frac{OD}{OB}$, de unde $\frac{OA}{OM + OA} = \frac{OD}{OB + OD}$, deci $\frac{OA}{AM} = \frac{OD}{DB}$ (2). Din (1) și (2), cum $AP = AM$ (ip.), rezultă $DC = DB$, de unde D mijlocul $[BC]$. Cum AD este mediatoarea $[BC]$, conform proprietății mediatoarei, avem AB=AC, deci $\triangle ABC$ este triunghi isoscel.

Barem:

Fie $AD \perp NQ, D \in NQ$. Cum $MB \perp NQ$ și $PC \perp NQ$ avem $MB \parallel AD \parallel PC$.	**1 p**
În $\triangle OPC$, unde $\{O\} = QN \cap MP$, $AD \parallel PC$, conform teoremei lui Thales avem: $\frac{OA}{AP} = \frac{OD}{DC}$ (1).	**1 p**

Cum $MB \parallel AD$, conform teoremei lui Thales avem: $\frac{OA}{OM}=\frac{OD}{OB}$, de unde $\frac{OA}{OM+OA}=\frac{OD}{OB+OD}$, deci $\frac{OA}{AM}=\frac{OD}{DB}$ (2).	**2 p**
Din (1) și (2), cum $AP=AM$ (ip.), rezultă $DC=DB$, de unde D mijlocul $[BC]$.	**1 p**
AD este mediatoarea $[BC]$, conform proprietății mediatoarei, avem AB=AC, deci $\triangle ABC$ este triunghi isoscel.	**2 p**

4. În patrulaterul convex $ABCD, [AD]\equiv[BC], m(\sphericalangle BCD)=120°, (AC$ este bisectoarea $\sphericalangle DAB$ și $(BD$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC$. Să se arate că: $AB=2CD$.

Prof. Boghian Stela

Soluție: Fie $AC\cap BD=\{O\}$. În $\triangle ABD$, conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{BO}{OD}=\frac{AB}{AD}$ (1). În $\triangle ABC$, conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{BC}$ (2). Cum AD=BC (ip.), din (1) și (2), conform reciprocei teoremei lui Thales, avem: $\frac{BO}{OD}=\frac{AO}{OC}\Rightarrow CD\parallel AB$, deci ABCD este trapez isoscel. Din ip. $\sphericalangle DAC\equiv\sphericalangle CAB$ și $\sphericalangle ACD\equiv\sphericalangle CAB$ (alt. int.) rezultă $\triangle ACD$ isoscel, deci $[AD]\equiv[DC]$. Cum $m(\sphericalangle BCD)=120°\Rightarrow m(\sphericalangle ABC)=60°$, deci $m(\sphericalangle ABD)=30°$. ABCD trapez isoscel

$\Rightarrow m(\sphericalangle DAB)=m(\sphericalangle ABC)=60°$. Triunghiul ABD este triunghi dreptunghic cu un unghi de $30°$, de unde

$AB=2AD$, iar din (1) rezultă $AB=2CD$.

Barem:

Fie $AC\cap BD=\{O\}$. În $\triangle ABD$, conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{BO}{OD}=\frac{AB}{AD}$ (1).	**1 p**
În $\triangle ABC$, conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{BC}$ (2).	**1 p**
Cum AD=BC (ip.), din (1) și (2), conform reciprocei teoremei lui Thales, avem: $\frac{BO}{OD}=\frac{AO}{OC}\Rightarrow CD\parallel AB$, deci ABCD este trapez isoscel.	**2 p**
Din ip. $\sphericalangle DAC\equiv\sphericalangle CAB$ și $\sphericalangle ACD\equiv\sphericalangle CAB$ (alt. int.) rezultă $\triangle ACD$ isoscel, deci $[AD]\equiv[DC]$.	**1 p**
Cum $m(\sphericalangle BCD)=120°\Rightarrow m(\sphericalangle ABC)=60°$, deci $m(\sphericalangle ABD)=30°$. ABCD trapez isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle DAB)=m(\sphericalangle ABC)=60°$. Triunghiul $\triangle ABD$ este triunghi dreptunghic cu un unghi de $30°$, de unde $AB=2AD$, iar din (1) rezultă $AB=2CD$.	**2 p**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
16 februarie 2013
CLASA a VII-a

1. Determinaţi partea întreagă a numărului $x=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+......+\frac{1}{2013^2}$.

2. **a)** Determinați numerele naturale de forma $\overline{aba}$, scrise în sistemul zecimal, cu proprietatea: $\sqrt{\overline{aba}}=\frac{a^2}{3}+2b$.

b) Deteminați numărul natural nenul x cu proprietatea:

$$\sqrt{(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot x)^2+13}\in\mathbb{N}.$$

3. Fie trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ, MN<PQ$ și punctele B,C picioarele perpendicularelor duse din M, respectiv P, pe dreapta NQ. Arătați că $\triangle ABC$ este triunghi isoscel, unde A este mijlocul segmentului MP.

4. În patrulaterul convex $ABCD, [AD]\equiv[BC], m(\sphericalangle BCD)=120°, (AC$ este bisectoarea $\sphericalangle DAB$ și $(BD$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC$. Să se arate că: $AB=2CD$.

Notă: **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.