Barem de notare – clasa a XI-a

Problema 1. a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos(tgx)}{x(tgx-\sin x)}=1$;

b)Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2016}{x}\right]$ nu există, unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Soluţie:

a) Scrie formula $cosp-cosq=-2sin\frac{p+q}{2}sin\frac{p-q}{2}$ sau o aplică direct **(0,5p)**

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(sinx)-\cos(tgx)}{x(tgx-sinx)}=\lim_{x\to 0}[-2\frac{\sin\frac{\text{sinx}+\text{tgx}}{2}\sin\frac{\text{sinx}-\text{tgx}}{2}}{x(tgx-sinx)}]$$

$$l=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\text{sinx}+\text{tgx}}{2}}{\frac{\text{sinx}+\text{tgx}}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\text{sinx}-\text{tgx}}{2}}{\frac{\text{sinx}-\text{tgx}}{2}}\cdot\frac{\frac{\text{sinx}+\text{tgx}}{2}}{x}\cdot\frac{\frac{\text{sinx}-\text{tgx}}{2}}{tgx-sinx}\ \textbf{(2p)}$$

Obţinem : $l=-2\cdot 1\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{sinx}{x}+\frac{tgx}{x}\right)\cdot(-\frac{1}{2})=1$ **(1,5p)**

b) $\lim_{x\to 0_{x>0}}\left[\frac{2016}{x}\right]=\infty$ **(0,5p)** deoarece $\frac{2016}{x}-1<\left[\frac{2016}{x}\right]$ **(0,5p)**

$\lim_{x\to 0_{x>0}}(\frac{2016}{x})=\infty$ **(0,5p)**

$\lim_{x\to 0_{x<0}}\left[\frac{2016}{x}\right]=-\infty$ **(0,5p)** deoarece $\left[\frac{2016}{x}\right]\le\frac{2016}{x}$ **(0,5p)**

$\lim_{x\to 0_{x<0}}\left(\frac{2016}{x}\right)=-\infty$ **(0,25p)**

Cum $\lim_{x\to 0_{x>0}}\left[\frac{2016}{x}\right]\neq\lim_{x\to 0_{x<0}}\left[\frac{2016}{x}\right]$ rezultă că nu există $\lim_{x\to 0}[\frac{2016}{x}]$.**(0,25p)**

Problema 2. Fie matricele A, B $\in M_3(\mathbf{R})$ cu $A \cdot A^t = \mathrm{B} \cdot \mathrm{B}^t = \mathrm{I}_3$. Să se arate că

$$det\big((A-B)(A+B)\big) = 0.$$

Gazeta matematică

Soluţie:

Dacă $X \in M_3(R), atunci\ det(X - X^t) = 0$**…………………(2p)**

Atunci $det\big((A-B)(A+B)\big) = det(A-B) \cdot det(A+B) =$…………**(1p)**

$= det(A-B) \cdot \det((A+B)^t) =$…………………………………………………………**(1p)**

$= det(A \cdot A^t + A \cdot B^t - B \cdot A^t - B \cdot B^t) = det(I_3 + AB^t - BA^t - I_3) =$

$= det(AB^t - (AB^t)^t) = 0$…………………………………………………… ……………**(3p)**

Problema 3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că există o infinitate de matrici $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$, astfel încât $A \cdot X = O_3$.

b) Să se arate că $A^n \neq I_3$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

c) Să se arate că pentru $\forall\, r \in \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Z}$ avem $det(A + rI_3) \neq 0$.

Soluţie:

a) Ecuaţia $A \cdot X = O_3$ este echivalentă cu un sistem liniar omogen, în care A este matricea sistemului. Cum $det(A) = 0$, alegem un minor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci $rang\ A = 2$. Notăm $z = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$ şi obţinem $X = \begin{pmatrix} \propto \\ -2 \propto \\ \propto \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ …………………………………………..**(3p)**

b) $detA = 0$, atunci $detA^n = 0$. Cum $detI_3 = 1$ rezultă că $A^n \neq I_3$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$ ....…… **(2p)**

c) $det(A + rI_3) = r(r^2 + 9r - 6)\ (*)$. Ecuaţia $(*)$ are o rădăcină $r_1 = 0 \in \mathbf{Z}$ şi rădăcinile iraţionale $\mathrm{r}_{2,3} = \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{2}$.

Aşadar $\forall\, r \in \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Z}$ avem $det(A + rI_3) \neq 0$………………………………………… **(2p)**.

Problema 4. Fie $\alpha \in \boldsymbol{N}, \boldsymbol{\alpha} \geq 3$. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ cu proprietățile $a_0 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = a_n - a_n^{\alpha}$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

a) Arătați că șirul $(a_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ este convergent și are limita 0.

b) Determinați $\beta \in \boldsymbol{N}, \beta \geq 2$ astfel încât șirul $(b_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ dat prin $b_n = \sqrt[\beta]{n} \cdot a_n$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$

să fie convergent și să aibă limita în $(0,+\infty)$.

Soluție:**a)**Se deduce imediat, prin inducţie după n, că $a_n \in (0,1)$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$.deci șirul este mărginit………………………………………………………….. **(1p)**

Pe de altă parte, $a_{n+1} - a_n = -a_n^{\alpha} < 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, adică șirul este strict descrescător.. **(1p)**

Deducem astfel că $(a_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ este convergent și are limita în $[0,1)$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. ………………………………………………………**(1p)**

b) Folosind criteriul Cesaro-Stolz, avem:

$$l = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[\beta]{n}}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[\beta]{n+1} - \sqrt[\beta]{n}}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \ldots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{a_{n+1}a_n}{a_n - a_{n+1}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \ldots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{a_n^2\left(1-a_n^{\alpha-1}\right)}{a_n^{\alpha}} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \ldots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \frac{1-a_n^{\alpha-1}}{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}} \cdot a_n^{\alpha-2}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \ldots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \left(1-a_n^{\alpha-1}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt[\beta]{n}\right)^{\alpha-2}}{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}} \cdot \left(\sqrt[\beta]{n} \cdot a_n\right)^{\alpha-2}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}}{\sqrt[\beta]{(n+1)^{\beta-1}} + \ldots + \sqrt[\beta]{n^{\beta-1}}} \cdot \left(1-a_n^{\alpha-1}\right) \cdot n^{\frac{\alpha-\beta-1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[\beta]{n} \cdot a_n\right)^{\alpha-2}} \right) \in (0,+\infty). \textbf{ (3p)}$$

Deducem că $\alpha - \beta - 1 = 0$, adică $\beta = \alpha - 1$ și mai mult:

$$l = \frac{1}{\beta \cdot l^{\alpha-2}} \Rightarrow l^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt[\alpha-1]{\alpha-1}}. \textbf{ (1p)}$$