Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală Dâmboviţa - 21 Februarie 2016

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Demonstraţi că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{n(n+2)}{2}.$$

Subiectul 2. Într-o progresie geometrică, termenii de rang m, n, p sunt respectiv a, b, c (nenuli). Demonstraţi că: $a^{n-p}\cdot b^{p-m}\cdot c^{m-n}=1$.

Subiectul 3. Rezolvaţi în numere reale sistemul:

$$\frac{xy}{-4x+3y}=\frac{yz}{4z-3y}=\frac{zx}{2z-3x}=\frac{x^2+y^2+z^2}{14}.$$

GM

Subiectul 4. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CAP cu centrele C_1, A_1, respectiv B_1. Notăm cu G, G', G'' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$, respectiv MNP. Demonstraţi că: $\overrightarrow{G'G''}=\frac{2\overrightarrow{GG''}}{3}$.

GM

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se evaluează de la 0 la 7.

CLASA A IX-A – BAREM.

SUBIECTUL 1. $n=1$ (1 punct)

$\sqrt{(n+1)(n+2)}+\frac{n(n+2)}{2} < \frac{(n+1)(n+3)}{2}$ (2 puncte)

$\sqrt{(n+1)(n+2)} < n+\frac{3}{2}$ (2 puncte)

$2 < 9/4$ (2 puncte)

SUBIECTUL 2 $a=b_1q^{m-1}$, $b=b_1q^{n-1}$, $c=b_1q^{p-1}$ (2 puncte)

$[b_1q^{m-1}]^{n-p}\ldots$ (2 puncte)

$=(b_1^{n-p}\ldots)\cdot(q^{(m-1)(n-p)}\ldots)$ (2 puncte)

$=b_1^0\cdot q^0=1$ (1 punct)

SUBIECTUL 3

Soluție. Cu notațiile $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, avem

$$\frac{1}{-4b+3a} = \frac{1}{-3c+4b} = \frac{1}{2a-3c} = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$ 1 punct

$a = 2b$, $c = \frac{2}{3}b$ 2 puncte

$$\frac{1}{-4b+6b} = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{9}{4b^2}\right)$$ 2 puncte

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $c = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. 2 puncte

SUBIECTUL 4

Soluție. Fie X un punct în planul triunghiului ABC. Atunci

2 puncte $3\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$ și $3\overrightarrow{XG'} = \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} =$

2 puncte $= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XP}\right) =$

2 puncte $= 2\frac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}}{3} + \frac{\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP}}{3} = 2\overrightarrow{XG} + \overrightarrow{XG''}$,

de unde $\overrightarrow{G'G''} = \frac{2\overrightarrow{GG''}}{3}$. 1 punct