



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016
CLASA a V-a

Problema 1. Determinați numerele de trei cifre pentru care, suprimând cifra zecilor, obținem un număr de 13 ori mai mic.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinați perechile (X, Y) de mulțimi care au ca elemente numere naturale nenule și care verifică simultan următoarele proprietăți:

- (1) fiecare din mulțimile X și Y are trei elemente;
- (2) $3 \in X$ și $5 \in Y$;
- (3) mulțimea $X \cap Y$ are exact un element;
- (4) dacă a și b sunt elemente diferite ale mulțimii X , atunci $(a + b) \in Y$.

Problema 3. Dacă A și B sunt numere naturale nenule, atunci notăm cu \overline{AB} numărul obținut prin scrierea, în ordine, a cifrelor lui B în continuarea cifrelor lui A . De exemplu, dacă $A = 193$ și $B = 2016$, atunci $\overline{AB} = 1932016$. Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte de forma \overline{AB} în fiecare din situațiile:

- a) numerele A și B sunt pătrate perfecte;
- b) numerele A și B sunt cuburi perfecte;
- c) numărul A este cub perfect, iar numărul B este pătrat perfect;
- d) numărul A este pătrat perfect, iar numărul B cub perfect.

Problema 4. Pe o masă sunt așezate 31 de cartonașe pe care sunt scrise numerele $1, 2, 3, \dots, 31$. Alex și Bogdan își aleg câte 15 cartonașe și observă că suma numerelor de pe cartonașele lui Alex este triplul sumei numerelor de pe cartonașele lui Bogdan. Aflați numărul scris pe cartonașul rămas pe masă.

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 19 martie 2016
CLASA a V-a - Soluții și barem orientativ

Problema 1. Determinați numerele de trei cifre pentru care, suprimând cifra zecilor, obținem un număr de 13 ori mai mic.

Gazeta Matematică

Soluție

Fie \overline{abc} un număr cu proprietatea din enunț.

Condiția dată revine la $\overline{abc} = 13 \cdot \overline{ac}$, adică la $100a + 10b + c = 130a + 13c$, deci la $10b = 30a + 12c$ **1p**

Observând că 5 divide atât $10b$ cât și $30a$ (sau examinând ultima cifră a acestor numere), se deduce că $12c$ este divizibil cu 5, deci $c \in \{0, 5\}$ **2p**

Dacă $c = 0$, se ajunge la $b = 3a$. Cum a este cifră nenulă, convin variantele: $a = 1, b = 3$; $a = 2, b = 6$ și $a = 3, b = 9$, care conduc la numerele 130, 260, respectiv 390. **2p**

Dacă $c = 5$, se ajunge la $b = 3a + 6$. Cum a este cifră nenulă, convine numai varianta $a = 1, b = 9$, care conduce la numărul 195. **2p**

În concluzie, există patru numere cu proprietatea dorită: 130, 260, 390 și 195.

Problema 2. Determinați perechile (X, Y) de mulțimi care au ca elemente numere naturale nenule și care verifică simultan următoarele proprietăți:

- (1) fiecare din mulțimile X și Y are trei elemente;
- (2) $3 \in X$ și $5 \in Y$;
- (3) mulțimea $X \cap Y$ are exact un element;
- (4) dacă a și b sunt elemente diferite ale mulțimii X , atunci $(a + b) \in Y$.

Soluție

Dacă $X = \{a, b, c\}$, cu $a < b < c$, atunci $a + b, b + c$ și $c + a$ sunt elemente diferite ale lui Y . Dacă, de exemplu, $a + b = b + c$, atunci $a = c$, ceea ce nu se poate.

Prin urmare $Y = \{a + b, b + c, c + a\}$ **1p**

Deoarece $a < b < c \leq a + b < a + c < b + c$, elementul comun al mulțimilor X și Y nu poate fi decât $c = a + b$ **2p**

Dacă $c = 3$, rezultă că $a = 1, b = 2$, deci $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{3, 4, 5\}$ care satisfac condițiile din enunț ($5 \in Y$ și $X \cap Y = \{5\}$). **1p**

Dacă $b = 3$, atunci $a \in \{1, 2\}$. Dacă $a = 1$, atunci $c = a + b = 4$, deci $X = \{1, 3, 4\}, Y = \{4, 5, 7\}$. Dacă $a = 2$, atunci $c = 5$, deci $X = \{2, 3, 5\}, Y = \{5, 7, 8\}$. Ambele perechi de mulțimi satisfac condițiile din enunț. .. **2p**

Dacă $a = 3$, atunci $b > 3$ și $c > 3$, prin urmare toate elementele lui Y sunt mai mari decât 5, deci nu avem soluții în acest caz. **1p**

Problema 3. Dacă A și B sunt numere naturale nenule, atunci notăm cu \overline{AB} numărul obținut prin scrierea, în ordine, a cifrelor lui B în continuarea cifrelor lui A . De exemplu, dacă $A = 193$ și $B = 2016$, atunci $\overline{AB} = 1932016$. Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte de forma \overline{AB} în fiecare din situațiile:

- a) numerele A și B sunt pătrate perfecte;
- b) numerele A și B sunt cuburi perfecte;
- c) numărul A este cub perfect, iar numărul B este pătrat perfect;
- d) numărul A este pătrat perfect, iar numărul B cub perfect.

Soluție

De exemplu:

a) Pentru $A = 4$ și $B = 9$ se obține $\overline{AB} = 49 = 7^2$ **1p**

Completând cu un număr par de 0-uri obținem, pornind de la exemplul de mai sus, o infinitate de soluții: pentru $A = 4$ și $B = 9 \cdot 10^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obține

$$\overline{AB} = \left(\underbrace{700\dots0}_{n \text{ cifre}} \right)^2 \dots \dots \dots \mathbf{1p}$$

b) Pentru $A = 8$ și $B = 1$ se obține $\overline{AB} = 81 = 9^2$ **1p**

Adăugându-i lui B $6n$ 0-uri la coadă, pentru $A = 8$ și $B = 10^{6n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obține $\overline{AB} = \left(\underbrace{900\dots0}_{3n \text{ cifre}} \right)^2 \dots \dots \dots \mathbf{1p}$

c) Pentru $A = 8$ și $B = 10^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obține $\overline{AB} = \left(\underbrace{900\dots0}_{n \text{ cifre}} \right)^2 \dots \dots \dots \mathbf{1p}$

d) Pentru $A = 36$ și $B = 1$ se obține $\overline{AB} = 361 = 19^2$ **1p**

Pentru $A = 36$ și $B = 10^{6n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obține $\overline{AB} = \left(\underbrace{1900\dots0}_{3n \text{ cifre}} \right)^2 \dots \dots \dots \mathbf{1p}$

Orice alte exemple corecte conduc și ele la acordarea punctajului prevăzut. De exemplu $A = 64$ și $B = 10^{6n}$ cu $n \geq 1$ verifică toate cazurile.

Problema 4. Pe o masă sunt așezate 31 de cartonașe pe care sunt scrise numerele $1, 2, 3, \dots, 31$. Alex și Bogdan își aleg câte 15 cartonașe și observă că suma numerelor de pe cartonașele lui Alex este triplul sumei numerelor de pe cartonașele lui Bogdan. Aflați numărul scris pe cartonașul rămas pe masă.

Soluție

B este cel puțin $1 + 2 + 3 + \dots + 15 = 120$ deci A este cel puțin $3 \cdot 120 = 360$.
2 puncte

Dar A este cel mult $17 + 18 + \dots + 31 = 360$ deci A este 360 și B este 120. 2 puncte
Deci A alege 17, 18, ..., 31 și B alege 1, 2, ..., 15, așadar $n = 163$ puncte