CLASA A XII-A

SUBIECTUL I

Calculați $\int \frac{\ln x - 1}{x^2 + (\ln x)^2}$ dx, x>1.

SUBIECTUL II

Fie a,b numere reale astfel încât 0<a<b si f:[a,b]→R de două ori derivabilă pe [a,b] cu f'' continuă. Daca $\int_a^b f(x)dx = \frac{a^2}{2} \cdot f'(a) - \frac{b^2}{2} \cdot f'(b) + bf(b) - af(a)$, să se arate că ∃ c ∈ (a,b) astfel încât $f''(c) = 0$.

SUBIECTUL III

Fie (G,$\circ$) grup si $H \subset G$ subgrup astfel încât $H \neq G$.

a) Să se arate ca dacă $A \subset G - H$ este finit şi nevidă, atunci $\exists x, y \in A$ astfel încât $x \circ y \notin A$.

b) Daca H_1, H_2 sunt subgrupuri ale lui G si $G = H_1 \cup H_2$, atunci $H_1 \subset H_2$ sau $H_2 \subset H_1$.

SUBIECTUL IV

Sa se determine funcția $f : R \to R_+$ care admite primitive F, pentru care avem relația $f(x) \cdot F(1-x) = 1 + x^2$, $\forall x \in R$

TIMP DE LUCRU 3 ORE. FIECARE SUBIECT ESTE NOTAT CU 7 PUNCTE

BAREME

CLASA A XII-A

I. $\int \frac{\ln x - 1}{x^2 + \ln^2 x} dx = \int \frac{\frac{\ln x - 1}{x^2}}{1 + (\frac{\ln x}{x})^2} dx = -\int \frac{(\frac{\ln x}{x})'}{1 + (\frac{\ln x}{x})^2} dx = -arctg \frac{\ln x}{x} + C$.(7pct)

II.Se aplica de doua ori metoda integrarii prin parti si o teorema de medie:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x' f(x)dx = xf(x)|_a^b - \int_a^b xf'(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b (\frac{x^2}{2})' f'(x)dx = bf(b) - af(a) - \frac{x^2}{2} f'(x)|_a^b + \int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x)dx = bf(b) - af(a) - \frac{b^2}{2} f'(b) + \frac{a^2}{2} f'(a) + \int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x)dx$.(cate 2 pct pentru fiecare integrare prin parti)

Comparand cu ipoteza $\Rightarrow \int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x)dx = 0$.(1pct). Cu o teorema de medie

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ astfel incat $\frac{c^2}{2} f''(c) = 0 \Rightarrow f''(c) = 0$.(2pct)

III. a) Presupunem ca $\forall x, y \in A$ avem $x \circ y \in A$; fie $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $|A| = n$; fie $B = \{x_1 \circ x_1, x_1 \circ x_2, ..., x_1 \circ x_n\}$. Din ipoteza $B \subseteq A$; daca $x_1 \circ x_i = x_1 \circ x_j \,|\, stg x_1^{-1} \Rightarrow x_i = x_j$, contradictie cu $|A| = n$ deci $|B| = n; B \subseteq A \Rightarrow B = A$ (3pct); deci $\exists i \in \overline{1,n}$ astfel incat $x_1 \circ x_i = x_1 \Rightarrow x_1 = e$; $e \in A \subset G - H, e \in H$ este contradictie deci demonstratie incheiata.(1pct)

b) Presupunem ca $H_1 \not\subset H_2$ si $H_2 \not\subset H_1$. Fie $a \in H_1 - H_2, b \in H_2 - H_1$; din $a \in H_1, b \in G - H_1 \Rightarrow a \circ b \notin H_1$ iar din $b \in H_2, a \in G - H_2 \Rightarrow a \circ b \notin H_2$. (2pct) Dar $G = H_1 \cup H_2 \Rightarrow a \circ b \notin G$ contradictie (1pct).

IV. Pt.
$x \to 1 - x \Rightarrow f(1-x) \cdot F(x) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f(x)F(1-x) - f(1-x)F(x) = 2x - 1 \Rightarrow (F(x)F(1-x))' = 2x - 1$
$F(x)F(1-x) = x^2 - x + c; F(x) > 0, \forall x \Rightarrow c > \frac{1}{4}$

(2pct)Din $F(x)F(1-x) = x^2 - x + c$, prin inmultire cu $f(x)$ avem $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + c}$;

adica $\frac{F^{'}(x)}{F(x)} = \frac{x^2+1}{x^2-x+c}$ deci

$\ln F(x) = ... = x + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+c) + \frac{3-2c}{\sqrt{4c-1}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{4c-1}} + l, l \in R$ (3pct)

$F(x) = ke^x\sqrt{x^2-x+c} \cdot e^{\frac{3-2c}{\sqrt{4c-1}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{4c-1}}}, k = e^l$ (2pct)