INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN

MUREŞ

www.edums.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a IX-a

Subiectul I

Să se determine termenul al n-lea şi raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ şi $a_1=\alpha$, unde $\alpha\in\mathbf{R}$.

Subiectul II

Să se rezolve ecuaţia în mulţimea numerelor reale $\left[\frac{2x+1}{5}\right]+\left[\frac{6x+8}{15}\right]+\left[\frac{6x+13}{15}\right]=10$, unde $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real t.

Subiectul III

În triunghiul ABC având laturile $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, fie P intersec□ia dintre bisectoarea CE □i mediana BD, $E\in(AB)$, $D\in(AC)$.

Să se determine numerele x □i y astfel încât $\overrightarrow{PA}=x\cdot\overrightarrow{PB}+y\cdot\overrightarrow{PC}$.

Subiectul IV

Fie triunghiul ΔABC astfel încât $AB = 1$ cm □i $AC = 2015$ cm. Fie M un punct în planul triunghiului ΔABC astfel încât:

$$\overrightarrow{r_M}=\frac{1007}{2015}\overrightarrow{r_A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{r_B}+\frac{1}{4030}\overrightarrow{r_C}.$$

Demonstra□i că $AM\perp BM$.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a IX-a
BAREM

SUBIECTUL I Să se determine termenul al n-lea şi raţia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ şi $a_1=\alpha$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluţie

$\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow \frac{S_m}{m^2}=\frac{S_n}{n^2}=k \Rightarrow S_m=k\cdot m^2$ .... 2 p

$a_m=S_m-S_{m-1}=k(2m-1)$, $\forall m\in \mathbb{N}^*$ .... 2 p

$a_1=k=\alpha \Rightarrow a_n=\alpha\cdot(2n-1)$ .... 1 p

$r=a_{n+1}-a_n=2\alpha$ .... 2 p

SUBIECTUL II Să se rezolve ecuaţia în mulţimea numerelor reale $\left[\frac{2x+1}{5}\right]+\left[\frac{6x+8}{15}\right]+\left[\frac{6x+13}{15}\right]=10$, unde $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real t.

Soluţie

Notăm $y=\frac{2x+1}{5}$ şi ecuaţia devine $[y]+\left[y+\frac{1}{3}\right]+\left[y+\frac{2}{3}\right]=10$ .... 2 p

Din identitatea lui Hermite $[y]+\left[y+\frac{1}{3}\right]+\left[y+\frac{2}{3}\right]=[3y]$, $\forall y \in \mathbb{R}$ .... 2 p

Deci, $[3y]=10 \Leftrightarrow \frac{10}{3}\leq y<\frac{11}{3}$ .... 1 p

Soluţiile ecuaţiei din enunţ sunt date de $\frac{10}{3}\leq\frac{2x+1}{5}<\frac{11}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{47}{6}\leq x<\frac{26}{3} \Leftrightarrow x\in\left[\frac{47}{6},\frac{26}{3}\right)$. .... 2 p

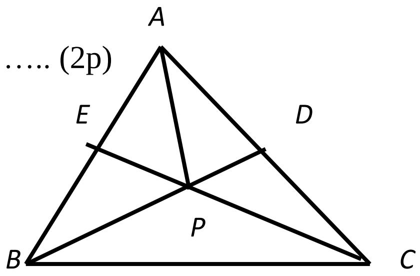
SUBIECTUL III În triunghiul ABC având laturile $AB=c, AC=b, BC=a$, fie P intersecția dintre bisectoarea CE și mediana BD, $E\in(AB), D\in(AC)$.

Să se determine numerele x și y astfel încât $\overrightarrow{PA}=x\cdot\overrightarrow{PB}+y\cdot\overrightarrow{PC}$.

Soluție.

$\Delta PAB \Rightarrow \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}$ și $\Delta PAC \Rightarrow \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA}$ … (1p) adunând relațiile obținem:

$$2\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA} \quad (1)$$ …………………………………. (2p)



Aplicăm teorema bisectoarei în triunghiul

$\Delta BDC \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PD}=-\frac{b}{2a}\overrightarrow{PB}$, folosind $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$,

obținem $\frac{2a+b}{2a}\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$. ………………………………………… (2p)

Înlocuind în relația (1)

obținem: $2\overrightarrow{PA}=-\frac{b}{2a}\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$, dar $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PA}$ de unde $\overrightarrow{PA}=-\frac{b}{a}\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}$ deci

$x=-\frac{b}{a}$, $y=-1$ …. (2p)

SUBIECTUL IV Fie triunghiul ΔABC astfel încât $AB=1$ cm și $AC=2015$ cm. Fie M un punct în planul triunghiului ΔABC astfel încât:

$$\overrightarrow{r_M}=\frac{1007}{2015}\overrightarrow{r_A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{r_B}+\frac{1}{4030}\overrightarrow{r_C}.$$

Demonstrați că $AM \perp BM$.

Soluție. $\overrightarrow{r_M}=\frac{1007}{2015}\overrightarrow{r_A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{r_B}+\frac{1}{4030}\overrightarrow{r_C}=\frac{1}{2}\left(\frac{2014}{2015}\overrightarrow{r_A}+\frac{1}{2015}\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_B}\right)$. ………………..2p

Fie $AB=c=1\ cm$ și $AC=b=2015\ cm$. Atunci relația precedentă se scrie:

$\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{2}\left(\frac{b-c}{b}\overrightarrow{r_A}+\frac{c}{b}\overrightarrow{r_C}+\overrightarrow{r_B}\right)(*)\dots$ ………………..2p

Cum $\frac{b-c}{b}+\frac{c}{b}=1$, alegând un punct N astfel încât $\frac{b-c}{b}\overrightarrow{r_A}+\frac{c}{b}\overrightarrow{r_C}=\overrightarrow{r_N}$, obținem că N se află pe segmentul (AC) și $\frac{AN}{NC}=\frac{c}{b-c}$, deci $\frac{AN}{AN+NC}=\frac{c}{b}$ sau $\frac{AN}{b}=\frac{c}{b}$, deci $AN=c=AB\dots\dots$2p

Relația (*) se rescrie $\overrightarrow{r_M}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{r_N}+\overrightarrow{r_B})$, deci M este mijlocul segmentului (NB), deci AM este mediană în triunghiul isoscel ΔBAN de bază (BN). În concluzie, AM este și înălțime, deci $AM \perp BM$ (1p)

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem