INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem clasa a XII-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Fie mulţimea $G=(k,\infty)\setminus\{k+1\},\ k>0,$ pe care se defineşte legea $*$ astfel încât:

$\log_a[(x*y)-k]=\log_a(x-k)\cdot\log_a(y-k),\ (\forall)x,y\in G,\ a>0,\ a\neq 1.$

a) Să se arate că structura algebrică $(G,*)$ este grup abelian.

b) Să se determine elementele $x\in G$ care verifică relaţia: $x=x'$, unde s-a notat cu x' simetricul lui x în raport cu legea *.

c) Să se arate că grupul $(\mathbf{R}^*,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(G,*)$.

(propus de prof. Zay Éva - CNS Zalău, din culegerea Olimpiade şi concursuri şcolare 2009,

Etapa locală- Galaţi- enunţ modificat)

Soluţie

Relaţia dată $\log_a[(x*y)-k]=\log_a(x-k)\cdot\log_a(y-k),\ (\forall)x,y\in G,\ a>0,\ a\neq 1,\ k>0$

se poate scrie în următoarea formă:

$\log_a[(x*y)-k]=\log_a(x-k)^{\log_a(y-k)},\ x,y\in G=(k,\infty)\setminus\{k+1\},\ k>0,\ a>0,\ a\neq 1$

de unde $x*y=k+(x-k)^{\log_a(y-k)},\ \forall x,\ y\in G,\ k>0,\ a>0,\ a\neq 1$ ....*0,5 puncte*

a) Stabilitatea lui G în raport cu legea *:

$\forall\ x,\ y\in G\Rightarrow x-k,\ y-k\in(0,\infty)\setminus\{1\}\Rightarrow\log_a(x-k)\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\Rightarrow(x-k)^{\log_a(y-k)}\in(0,\infty)\setminus\{1\}\Rightarrow$

$\Rightarrow k+(x-k)^{\log_a(y-k)}\in(k,\infty)\setminus\{k+1\}\Rightarrow x*y\in G,\forall x,\ y\in G\Leftrightarrow G$ stab. ....*0,5 puncte*

Asociativitatea: $(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,\ z\in G$

$(x*y)*z=\left(k+(x-k)^{\log_a(y-k)}\right)*z=k+\left(k+(x-k)^{\log_a(y-k)}-k\right)^{\log_a(z-k)}=k+(x-k)^{\log_a(y-k)\cdot\log_a(z-k)}$

$x*(y*z)=x*\left(k+(y-k)^{\log_a(z-k)}\right)=k+(x-k)^{\log_a\left(k+(y-k)^{\log_a(z-k)}-k\right)}=k+(x-k)^{\log_a(y-k)^{\log_a(z-k)}}=$

$=k+(x-k)^{\log_a(z-k)\cdot\log_a(y-k)}$ ....*1 punct*

Comutativitatea: $x*y=y*x,\ \forall x\in G$

$k+(x-k)^{\log_a(y-k)}=k+(y-k)^{\log_a(x-k)}\Leftrightarrow\log_a(y-k)\cdot\log_a(x-k)=\log_a(x-k)\cdot\log_a(y-k)$

....*0,5 puncte*

Element neutru: $\exists\, e\in G,\ x*e=e*x=x,\ \forall\ x\in G$

$x*e=x \Leftrightarrow k+(x-k)^{\log_a(e-k)}=x \Leftrightarrow (x-k)^{\log_a(x-e)}=x-k \Leftrightarrow$
$\log_a(x-k)[\log_a(e-k)-1]=0, \forall x\in G \Rightarrow \log_a(e-k)=1 \Rightarrow e-k=a \Rightarrow$
$e=k+a\in G=(k,\infty)\setminus\{k+1\}, k>0, a>0, a\neq 1$ este elementul neutru în raport cu legea $*$.
....1 *punct*

Elemente simetrizabile: $\forall\ x\in G, \exists\ x'\in G$ astfel incat $x*x'=x'*x=e$
$x*x'=e \Leftrightarrow k+(x-k)^{\log_a(x'-k)}=k+a \Leftrightarrow \log_a(x'-k)\cdot\log_a(x-k)=1 \Rightarrow$
$x'=k+a^{\frac{1}{\log_a(x-a)}}\in G=(k,\infty)\setminus\{k+1\}, \forall\ x\in G$ ....1 *punct*

În concluzie $(G,*)$ este grup abelian..0,5 *puncte*

b) $x=x', x\in G \Rightarrow x=k+a^{\frac{1}{\log_a(x-k)}} \Leftrightarrow x-k=a^{\frac{1}{\log_a(x-k)}} \Leftrightarrow [\log_a(x-k)]^2=1$

Dacă $\log_a(x-k)=1 \Rightarrow x=k+a\in G$, iar din $\log_a(x-k)=-1 \Rightarrow x=k+\dfrac{1}{a}\in G$

sunt cele două elemente din G care verifică cerinţa...0,5 *puncte*

c) Fie funcţia $f:\mathbf{R}^*\to G, f(x)=k+a^x, a>0, a\neq 1.$

f este izomorfism de grupuri $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bijectiva} \Leftrightarrow \text{injectiva}+\text{surjectiva} \\ f \text{ morfism}: f(x\cdot y)=f(x)*f(y), \forall\ x,y\in\mathbf{R}^* \end{cases}$ ....1,5 *puncte*

PROBLEMA 2

Se consideră grupul $(G,\ \cdot)$ şi elementele $a,b\in G$, iar $x=aba^{-1}$. Să se calculeze $x^2, x^7, x^n, n\in\mathbf{N}.$

(propus de prof. Zay Éva, CNS Zalău din culegerea Exerciţii şi probleme pt cl. a XII-a M. Burtea, G. Burtea, Ed. Carminis, 2001)

Soluţie

$x^2=(aba^{-1})(aba^{-1})=ab(a^{-1}a)ba^{-1}=abba^{-1}=ab^2a^{-1}$
$x^3=x^2\cdot x=(ab^2a^{-1})(aba^{-1})=ab^2(a^{-1}a)ba^{-1}=ab^3a^{-1}$ .... 3 *puncte*

presupunem că $x^n=ab^na^{-1}$ pentru un n dat şi demonstrăm că pentru $n+1$ $x^{n+1}=ab^{n+1}a^{-1}$.
$x^{n+1}=x^n\cdot x=(ab^na^{-1})(aba^{-1})=ab^n(a^{-1}a)ba^{-1}=ab^nba^{-1}=ab^{n+1}a^{-1}$ ....3 *puncte*

Deci, $x^n=ab^na^{-1}, \forall\ n\in\mathbf{N}^* \Rightarrow x^7=ab^7a^{-1}$..1 *punct*

PROBLEMA 3

a) Să se calculeze $\int \frac{\sin x}{5\sin x + 7\cos x}dx,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Să se calculeze $\int \frac{x+\sin^2 x + \sin 2x}{x - \cos^2 x}dx,\ x > 1$

(propus de prof. Conde Maria – Colegiul Naţional „Simion Bărnuţiu" Şimleu Silvaniei)

Soluţie

a) Notăm $I = \int \frac{\sin x}{5\sin x + 7\cos x}dx,$ J=$\int \frac{\cos x}{5\sin x + 7\cos x}dx$ ....*1 punct*

$$\begin{cases} 5I + 7J = x + C_1 \\ -7I + 5J = \ln\left(5\sin x + 7\cos x\right) + C_2 \end{cases}$$ ....*1 punct*

$I = \frac{5}{74}x + \frac{7}{74}\ln\left(5\sin x + 7\cos x\right) + C$ ....*1 punct*

b) $\varphi(x) = x - \cos^2 x,\ \varphi'(x) = 1 + \sin 2x$ ....*1 punct*

$I = \int \frac{x+\sin^2 x + \sin 2x}{x - \cos^2 x}dx = \int \frac{x+1-\cos^2 x + \sin 2x}{x - \cos^2 x}dx =$

$\int \frac{x - \cos^2 x}{x - \cos^2 x}dx + \int \frac{1+\sin 2x}{x - \cos^2 x}dx = x + \ln\left(x - \cos^2 x\right) + C$ …………………….*2 puncte*

$I = x + \ln\left(x - \cos^2 x\right) + C$ ……………………………………………………*1punct*

PROBLEMA 4

Determinaţi funcţiile $f : [0,1] \to R$ derivabile, cu derivata continuă, care admit o primitivă *F*, satisfăcând condiţiile:

(i) $F(0) = F(1) = 0$;

(ii) $xf(x^2) = F(x)f'(x)$, pentru orice *x* din $[0,1]$.

(Gazeta Matematică)

Soluţie

Integrând pe $[0,1]$ se obţine $\int_0^1 F(x)f'(x)dx = F(x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f^2(x)dx = -\int_0^1 f^2(x)dx$ ....*2 puncte*

$\int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}(F(1) - F(0)) = 0$ ....*2 puncte*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Scăzând relaţiile şi folosind (ii) se obţine $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$ ....*2 puncte*

Finalizare, *f* este funcţia identic nulă..*1 punct*