



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE  
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU  
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică  
"Vrănceanu – Procopiu"

14 decembrie 2024

MATEMATICĂ

XI

*Problema I (10 puncte)*

a) Fie  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu  $\det A = 0$ . Arătați că, dacă ecuația  $X^3 = A$  are o infinitate de soluții în  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , atunci  $A = O_2$ .

b) Determinați matricele inversabile  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că ecuația  $X^3 = A$  are o infinitate de soluții în  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

*Problema a II-a (10 puncte)*

Fie  $a > 0$  și fie șirul  $(x_n)_n$ , unde  $x_0, x_1 > 0$  și  $x_{n+2} = ax_{n+1} + \sqrt{x_n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Să se arate că, dacă  $a \geq 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

b) Dacă  $a \in (0, 1)$  și  $0 < x_0 = x_1 \leq \frac{1}{(1-a)^2}$ , să se arate că șirul  $(x_n)_n$  este convergent și să se determine limita sa.

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe câte o foaie separată, care se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 10 la 1 (1 punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.