Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A -XI-A

21 februarie 2016

Subiectul I

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare linie este pozitivă și suma elementelor de pe fiecare coloană este negativă.

Calculați $det(A)$.

Subiectul II

Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $det(AB) \neq 0$.

a) Arată că $det(A+B) + det\,(A-B) = 2(detA + detB)$.
b) Arată că $Tr(det(AB+BA)I_2 - (AB-BA)^2) \,\vdots\, 8$.

Subiectul III

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale astfel încât $a_0 \in \mathbb{R}$ și $a_{n+1} = a_n^2 - 8a_n + 18, \forall n \geq 0$.

a) Să se arate că dacă șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent atunci $\exists p \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_{n+1} = a_n, \forall n \geq p$.
b) Determinați mulțimea valorilor naturale ale lui a_0 pentru care șirul a_n este convergent.

Subiectul IV

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\sqrt[k+1]{1+\frac{1}{k}} - 1 \right)$.

Notă:Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte