INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN

MUREŞ

www.edums.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a XII-a

Subiectul I

Fie $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ astfel încât $a+b=t\neq 0$ □i $ab=cd$. Se consideră mul□imea:

$M=\left\{\begin{pmatrix} ax+1 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & bx+1 \end{pmatrix} \mid x\in \mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{t}\right\}\right\}$. Arăta□i că:

a) $(\mathrm{M},\cdot)$ este grup abelian.

b) $(\mathrm{M},\cdot)$ este izomorf cu grupul $(G,*)$ unde $G=\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{t}\right\}$ □i $x*y=x+y+txy$.

Subiectul II

Fie □irul $(I_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\left(tg^{n-1}x+tg^{n}x+tg^{n+1}x\right)dx, n\geq 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n^2]{nI_n}-1\right)$.

Subiectul III

Fie I,J intervale □i $f:I\to\mathbf{R}^*$ o func□ie cu primitiva $F:I\to\mathbf{R}$ bijectivă.

a) Să se calculeze $\int \frac{F^{-1}(x)}{f\left(F^{-1}(x)\right)}dx, x\in J$.

b) Să se calculeze $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx, x\in \mathbf{R}$.

Subiectul IV

Fie $(A,+,\cdot)$ un inel și $a,b\in A$, astfel încât $(a+b)^2=a^2+b^2$ și $(a+b)^3=a^3+b^3$.

Să se arate că $(a+b)^n=a^n+b^n, \forall n\in N, n\geq 4$. (G.M.)

Notă. Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I
Fie $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ astfel încât $a+b=t\neq 0$ și $ab=cd$. Se consideră mulțimea:

$$M=\left\{\begin{pmatrix} ax+1 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & bx+1 \end{pmatrix} \mid x\in \mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{t}\right\}\right\}.$$ Arătați că:

a) $(\mathrm{M},\cdot)$ este grup abelian.

b) $(\mathrm{M},\cdot)$ este izomorf cu grupul $(G,*)$ unde $G=\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{t}\right\}$ și $x*y=x+y+txy$.

Soluție:

a) Fie $M(x)=\begin{pmatrix} ax+1 & 0 & cx \\ 0 & 0 & 0 \\ dx & 0 & bx+1 \end{pmatrix}, x\in \mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{t}\right\}$. Se verifică prin calcul direct:

$$M(x)\cdot M(y)=M(txy+x+y)=M\left(t\left(x+\frac{1}{t}\right)\left(y+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t}\right)(1), \forall x,y\in \mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{t}\right\}$$

și $\left(x+\frac{1}{t}\right)\left(y+\frac{1}{t}\right)\neq 0 \Leftrightarrow txy+x+y\neq -\frac{1}{t}$, se deduce astfel partea stabilă. (1,5p)

- Asociativitatea (0,5p)
- Comutativitatea (0,5p)
- Element neutru $E=M(0)$ (0,5p)
- $(M(x))^{-1}=M\left(-\frac{x}{tx+1}\right)\in M$. (1p)

b) Se alege $f:G\to M$, $f(x)=M\left(\frac{x-1}{t}\right)$ și cu (1) se arată că (1p)

i) $f(xy)=f(x)f(y), \forall x,y\in G$ (1p)

ii) f bijectivă. (1p)

SUBIECTUL II Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\left(tg^{n-1}x+tg^n x+tg^{n+1}x\right)dx, n\geq 1.$$

Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n^2]{nI_n}-1\right)$.

Soluție:

Avem

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x tgx)^{n-1} e^x (1 + tgx + tg^2x)dx = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2p)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x tgx)^{n-1} (e^x tgx)' x = \frac{1}{n} (e^x tgx)^n \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n} e^{\frac{n\pi}{4}}. \ \ldots\ldots\ldots (2p)$$

Atunci $n\left(\sqrt[n^2]{nI_n}-1\right) = n\left(e^{\frac{\pi}{4n}}-1\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{4n}}-1}{\frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{\pi}{4}$ ……… (2p)

Deci limita cerută este $\frac{\pi}{4}$. ……(1p)

SUBIECTUL III Fie I, J intervale și $f: I \to \mathbf{R}^*$ o funcție cu primitiva $F: I \to \mathbf{R}$ bijectivă.

a) Să se calculeze $\int \frac{F^{-1}(x)}{f\left(F^{-1}(x)\right)} dx,\ x \in J$.

b) Să se calculeze $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} dx,\ x \in \mathbf{R}$.

Soluție:

a) Din F bijectivă $\Rightarrow F\left(F^{-1}(x)\right) = x, \forall x \in J$.

Prin derivare obținem

$$F'\left(F^{-1}(x)\right)\cdot\left(F^{-1}\right)'(x) = 1, \forall x \in J \Leftrightarrow \left(F^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f\left(F^{-1}(x)\right)}, x \in J \qquad (2p)$$

și astfel

$$\left(\frac{1}{2}\left(F^{-1}(x)\right)^2\right)' = F^{-1}(x)\cdot\left(F^{-1}(x)\right)' = F^{-1}(x)\frac{1}{f\left(F^{-1}(x)\right)}, x \in J, \qquad (2p)$$

deci: $\int \frac{F^{-1}(x)}{f\left(F^{-1}(x)\right)} dx = \frac{1}{2}\left(F^{-1}(x)\right)^2 + C,\ x \in J$. (1p)

b) ***Metoda I:***

$$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' \cdot \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

(2p)

Metoda II: Fie $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, x\in\mathbf{R}$ şi $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, F(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Avem $F'=f, F$ bijectivă și cum $F^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x\in\mathbf{R}\Rightarrow f\left(F^{-1}(x)\right)=\sqrt{x^2+1},$

deci $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{F^{-1}(x)}{f\left(F^{-1}(x)\right)}dx = \frac{1}{2}\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$. (2p)

SUBIECTUL IV Fie $(A,+,\cdot)$ un inel şi $a,b\in A$, astfel încât $(a+b)^2=a^2+b^2$ şi $(a+b)^3=a^3+b^3$.

Să se arate că $(a+b)^n=a^n+b^n, \forall n\in N, n\geq 4$. (G.M.)

Soluţie:

Din $(a+b)^2=a^2+b^2$ rezultă că ab=-ba, deci $ab^2=abb=-bab=b^2a.$

…………………….(1p)

Cum $a^3+b^3=(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)\left(a^2+b^2\right)=a^3+ab^2+ba^2+b^3$, rezultă că $ab^2=-ba^2$. Arătăm prin inducţie că $a^nb=-b^na.$ Proprietatea este adevărată pentru n=1 şi n=2.

Avem $a^{n+1}b=a^n(ab)=-a^nba=b^na^2=b^{n-1}ba^2=-b^{n-1}ab^2=-b^{n-1}b^2a=-b^{n+1}a.$

……………………..(3)

Arătăm prin inducţie că $(a+b)^n=a^n+b^n$. Proprietatea este adevărată pentru $n\in\{1,2,3\}$.

Presupunem adevărată pentru n. Atunci

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n(a+b)=\left(a^n+b^n\right)(a+b)=a^{n+1}+a^nb+b^na+b^{n+1}=a^{n+1}+b^{n+1}$$

,………….(3p)

Ceea ce trebuia demonstat.

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem