Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Clasa a IX-a M$_1$

Problema 1

Fie $a,b,c \in (0.\infty)$ şi $a+b+c=2016$.

Să se arate că $\sqrt{ab+ac}+\sqrt{ab+bc}+\sqrt{ac+bc} \le 3024$.

Problema 2

Rezolvați ecuația : $\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]=1$, unde $[a]$ reprezintă partea intreagă a numărului real a.

Problema 3

Fie $ABCD$ un patrulater convex, punctul P mijlocul segmentului $[AB]$,punctele $M \in [BC]$ și $N \in [AD]$ astfel încât $\frac{BM}{BC}=\frac{AN}{AD}=\frac{1}{3}$.

a) Exprimați vectorii $\overrightarrow{PM}$ și $\overrightarrow{PN}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$.

b) Demonstrați că mijloacele segmentelor $[AB]$, $[MN]$ și $[CD]$ sunt coliniare.

Problema 4

Cel mai mic dintre unghiurile unui poligon convex măsoară 132°.Aflați numărul laturilor poligonului, știind că măsurile unghiurilor sale sunt numere în progresie aritmetică de rație 2°.(se știe că suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi , $n \ge 3$, este $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală -14.02.2015

Clasa a IX-a M_1

Soluții și bareme

Problema 1

Aplicăm inegalitatea mediilor:

$\sqrt{ab+ac}=\sqrt{a(b+c)}\le\frac{a+b+c}{2}=1008$ ……………………………………………**2p**

$\sqrt{ab+bc}=\sqrt{b(a+c)}\le\frac{a+b+c}{2}=1008$ ……………………………………………**2p**

$\sqrt{bc+ac}=\sqrt{c(b+a)}\le\frac{a+b+c}{2}=1008$ ……………………………………………**2p**

Prin sumarea relațiilor de mai sus se obtine inegalitatea din enunț…………………..**1p**

Problema 2

Notăm $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[x+\frac{1}{3}\right]=1-k$ ……………………………………………**1p**

Scriem inegalitățile pt cele două părți întregi:

$$\begin{aligned}&k-\frac{1}{2}\le x<k+\frac{1}{2}\\&\frac{2}{3}-k\le x<\frac{5}{3}-k\end{aligned}$$ ……………………………………………………………....**2p**

Din acestea prin eliminarea lui x rezultă $k\in\left(\frac{1}{12},\frac{13}{12}\right)$ și cum $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=1$…….**3p**

Deci $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\cap\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$…………………………………………………**1p**

Problema 3

a) $\frac{BM}{MC}=\frac{AN}{ND}=\frac{1}{2}$.

$\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ ……………………………………………..**2p**

$\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$ ……………………………………………………………..**2p**

b) Notăm mijloacele segmentelor $[MN]$ și $[CD]$ cu Q, respectiv R.

$\overrightarrow{PR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$……………………………………………………………….**1p**

$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}\right)=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$……………………………**1p**

Deci, $\overrightarrow{PR}=3\overrightarrow{PQ}\Rightarrow P,Q,R$ coliniare…………………………………………….....**1p**

Problema 4

$a_1=132^\circ$, $r=2^\circ$, $S_n=\frac{\left[2a_1+(n-1)r\right]\cdot n}{2}=n\left(n+131^\circ\right)$…………………………..**4p**

Dar $S_n=(n-2)\cdot 180^\circ\Rightarrow(n-2)\cdot 180^\circ=n\left(n+131^\circ\right)$……………………………….**2p**

Deci $n_1=1<3$ nu convine și $n_2=40\geq 3$ soluție……………………………………**1p**