MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA PE SECTOR, 15.02.2015 -

CLASA A XI-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1, autor ***

O matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ are proprietățile $A^2=\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$ și $A^3=\begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix}$. Arătați că $A^n=\begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Din $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$ rezultă $bc=0$.	**2p**
Dacă $b=c=0$, atunci $A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$ și concluzia este verificată.	**1p**
Dacă, de exemplu, $b=0\neq c$, atunci $c=a+d$ și rezultă $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ ac^2+cd^2 & d^3 \end{pmatrix}$, de unde $ad=0$. În cazul $a=0$ obținem $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{pmatrix}$, de unde $A^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d^n & d^n \end{pmatrix}$, iar în cazul $d=0$ obținem $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde $A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	**3p**
Cazul $c=0\neq b$ se tratează similar (sau se reduce la cazul precedent înlocuind A cu ${}^tA$)	**1p**

Subiect 2, autor ***

Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $k\in\mathbb{N}^*$ și matricea $A\in M_n(\mathbb{R})$ pentru care are loc relația : $A^{4k+1}=A^{4k-1}+A^{4k-2}+\ldots+A+I_n$. Să se demonstreze că :

a) A este inversabilă;

b) $\det(A+I_n)\geq 0$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Relaţia este echivalentă cu $A\left(A^{4k}-A^{4k-2}-\ldots-I_n\right)=I_n$, deci A este inversabilă.	2p
Adunăm în ambii membrii ai egalităţii A^{4k} şi obţinem : $A^{4k}\left(A+I_n\right)=A^{4k}+A^{4k-1}+\ldots+A+I_n$. Fie $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{4k+1}+i\sin\frac{2k\pi}{4k+1}, 1\le k\le 4k$ rădăcinile complexe diferite de 1 ale polinomului $P(X)=X^{4k}+X^{4k-1}+\ldots+X+1$.	2p
$\det\left(A^{4k}+A^{4k-1}+\ldots+A+I_n\right)=\det\left(\prod_{k=1}^{2n}\left(A-\varepsilon_k\cdot I_n\right)\left(A-\overline{\varepsilon_k}\cdot I_n\right)\right)=\prod_{k=1}^{2n}\left\|\det\left(A-\varepsilon_k\cdot I_n\right)\right\|^2\ge 0$, de unde deducem concluzia.	3p

Subiect 3, GM 10/2014 şi supliment GM 4/2014

a) Arătaţi că dacă $a,b,c>0$ sunt numere reale iar şirul cu termenul general

$$x_n=\frac{a}{b^n}+\frac{b}{c^n}+\frac{c}{a^n},\ n\in\mathbb{N}$$

este convergent, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton.

b) Determinaţi limita şirului $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1=1$ şi $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+\frac{1}{2^n}}$ pentru $n\ge1$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă unul dintre numere, de exemplu a, este subunitar, atunci $x_n>\frac{c}{a^n}$ şi $\frac{c}{a^n}\to+\infty$ implică $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$, contradicţie	2p
Deducem că $a,b,c\ge1$, deci şirurile $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$, sunt crescătoare iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.	2p
b) Din $x_{n+1}^2=x_n^2+\frac{1}{2^n}$ rezultă $x_n^2=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$	2p
$x_n=\sqrt{2-\frac{1}{2^{n-1}}}\to\sqrt{2}$	1p

Subiect 4, autor *Mihail Bălună*

Fie $n\ge2$ un număr natural şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie. Precizaţi, justificând răspunsul, dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate:

a) oricare ar fi funcţia f, dacă $\lim_{x\to0}f(x)\sin nx=0$, atunci $\lim_{x\to0}f(x)\sin x=0$;

b) oricare ar fi funcţia f, dacă $\lim_{x\to\infty}f(x)\sin x=0$, atunci $\lim_{x\to\infty}f(x)\sin nx=0$;

c) oricare ar fi funcţia f, dacă $\lim_{x\to\infty}f(x)\sin nx=0$, atunci $\lim_{x\to\infty}f(x)\sin x=0$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Adevărat: $\lim_{x\to0}f(x)\sin x=\lim_{x\to0}f(x)\sin nx\frac{\sin x}{\sin nx}=0\cdot\frac{1}{n}=0$	2p
b) Adevărat: din $\|\sin nx\|\le n\|\sin x\|$ şi $\lim_{x\to\infty}n\|f(x)\sin x\|=0$ reiese $\lim_{x\to\infty}\|f(x)\sin nx\|=0$	2p

Din $\lim\limits_{x\to\infty} \lvert f(x)\sin nx \rvert = 0$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\sin nx = 0$	1p
c) Fals: de exemplu, luăm $f(x)=1$, dacă $x=\pi/n+2k\pi, k\in\mathbb{N}$ şi $f(x)=0$ în rest	1p
$f(x)\sin nx = 0$, oricare ar fi x, deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\sin nx = 0$, pe când $f(x)\sin x = \sin \pi/n \neq 0$ dacă $x=\pi/n+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\sin x$ nu este 0	1p