R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a VII-a

PROBLEMA 1

Să se determine valorile întregi ale lui x, *pentru care valoarea expresiei* $E(x)=\dfrac{\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{x-7}$ *este număr întreg.*

PROBLEMA 2

Determinaţi numărul raţional a, ştiind că $\left(\dfrac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}+\dfrac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)\cdot a+\sqrt{5}$ *este număr raţional.*

PROBLEMA 3

a) Demonstraţi că $\dfrac{k}{n(n+k)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}, \forall n,k\in N$

b) Se dau numerele:

$a=\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\dfrac{3}{5\cdot 8}+\dfrac{4}{8\cdot 12}+\dfrac{5}{12\cdot 17}+\dfrac{6}{17\cdot 23}+\dfrac{7}{23\cdot 30}$ *şi* $b = 3+8+13+\ldots+10018$.

Arătaţi că numărul $I=\sqrt{15a+\dfrac{b}{1002}}\in R-Q$.

PROBLEMA 4

Fie ABC un triunghi oarecare. Poate fi împărţit acest triunghi în 16384 de triunghiuri congruente? Justificaţi.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a VII-a

Barem de evaluare şi notare

PROBLEMA 1

Să se determine valorile întregi ale lui x, pentru care valoarea expresiei $E(x)=\dfrac{\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{x-7}$ *este număr întreg.*

Soluţie:

$E(x)=\dfrac{\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right|+\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|}{x-7}=$..................*2 puncte*

$=\dfrac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1+3-\sqrt{5}+2-\sqrt{2}}{x-7}$ …………………………………………….*2 puncte*

$E(x)=\dfrac{3}{x-7}\in Z$ dacă $(x-7)|3$, de unde $x-7\in\{-3;-1;1;3\}$.............................*2 puncte*

rezultă că $x\in\{4;6;8;10\}$...*1 punct*

PROBLEMA 2

Determinaţi numărul raţional a, ştiind că $\left(\dfrac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}+\dfrac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)\cdot a+\sqrt{5}$ *este număr raţional.*

Soluţie:

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}+\dfrac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\right)\cdot a+\sqrt{5}=\dfrac{a}{\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}}+\dfrac{a}{\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}}+\sqrt{5}=$……………… *2 puncte*

$=\dfrac{a}{\left|\sqrt{5}+2\right|}+\dfrac{a}{\left|\sqrt{5}-2\right|}+\sqrt{5}=\dfrac{a}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{a}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5}=$……………………………………*2 puncte*

$=a\left(\sqrt{5}-2\right)+a\left(\sqrt{5}+2\right)+\sqrt{5}=(2a+1)\sqrt{5}$ este număr raţional.………………………*1 punct*

unde a număr raţional dacă 2a+1=0……………………………………………………….*1 punct* atunci a= $-\frac{1}{2}$ număr raţional. ………………………………………………………………….....*1 punct*

PROBLEMA 3

a) Demonstraţi că $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}, \forall n,k\in N$

b) Se dau numerele:

$a=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 23}+\frac{7}{23\cdot 30}$ *şi b = 3+8+13+…+10018.*

Arătaţi că numărul $I=\sqrt{15a+\frac{b}{1002}}\in R-Q$.

__Soluţie:__

a) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{n+k-n}{n(n+k)}=\frac{k}{n\cdot(n+k)}, \forall n,k\in N$ ……………………………………………......*2 puncte*

b) $a=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 23}+\frac{7}{23\cdot 30}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\frac{1}{23}-\frac{1}{30}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{30}=\frac{7}{15}$ ……………………………………………………………………………*1punct*

$b=3+8+13+...+10018=3+(5\cdot 1+3)+(5\cdot 2+3)+...+(5\cdot 2003+3)$ ………………….*1punct*

$3\cdot 2004+5\cdot(1+2+...+2003)=1002\cdot 10021$ ……………………………………………........*1punct*

$15a+\frac{b}{1002}=10028$ care nu este pătrat perfect……………………………………………….*1punct*

Atunci $I=\sqrt{15a+\frac{b}{1002}}\in R-Q$..*1punct*

PROBLEMA 4

Fie ABC un triunghi oarecare. Poate fi împărţit acest triunghi în 16384 de triunghiuri congruente? Justificaţi.

__Soluţie:__

Fie *M, N, P* mijloacele laturilor *BC, CA,* respectiv *AB* din ΔABC……………….. *1punct*
Obţinem $\Delta APN\equiv\Delta BPM\equiv\Delta CMN\equiv\Delta PMN$, conform cazului L.L.L. ………..*2 puncte*
Prin acelaşi procedeu fiecare din cele 4 triunghiuri se vor împărţi fiecare în câte alte 4 triunghiuri congruente, se obţin 4^2 triunghiuri congruente…………………………..*1 punct*
În continuare fiecare din cele 4^2 triunghiuri congruente se va împărţi în câte 4 triunghiuri congruente, rezultă 4^3 triunghiuri congruente………………………………………………*1 punct*
Procedeul se continuă, până obţinem 4^7 = 16384 triunghiuri congruente…………..*2 puncte*