OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a X-a

VARIANTA 2

1. Se consideră numerele complexe $z_1, z_2 \ldots z_n$, nenule, astfel încat

$z_k \cdot z_{k+1} - (1-i)z_k - i = 0$,

Calculați produsul $z_1 \cdot z_2 \ldots z_n$, $n \in \mathbf{N}^*$

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2^{5x+7} + 4^{4y+5} + 16^{3z+4} + 256^{t+3} = 64 \\ \log_2(5x+7) + \log_2(4y+5) + \log_2(3z+4) + \log_2(t+3) = 2 \end{cases}$$

3. Fie $x_1, x_2, \ldots x_n \in [0,1]$. Să se arate că:

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1}{1+x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \le n-1 + \frac{1}{1+x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Gazeta Matematică nr. 11 / 2013

4. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care verifică relația: $(f \circ f)(x) = x^3 + x - 8$ $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Știind că orice ecuație polinomială $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$ cu coeficienții reali și de grad impar n are cel puțin o rădăcină reale:

a) să se arate că funcția f este bijectivă,

b) Calculați f(2).

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a X-a

VARIANTA 2

BAREM DE CORECTARE:

Subiectul 1. a) $z_{k+1} = \dfrac{(1-i)Z_K + \mathrm{i}}{z_k}$ 1p

$z_{k+2} = \dfrac{(-i)z_k + i + 1}{(1-i)z_k + i}$ 1p

$z_{k+3} = \dfrac{1}{-iz_k + 1 + i}$ 1p

$z_{k+4} = z_k$ 1p

finalizare 3p

Subiectul 2. Din a doua ecuație rezultă : $(5x + 7)(4y + 5)(3z + 4)(t + 3) = 2^2 = 4$........................2p

$64 \geq 4\sqrt[4]{2^{(5x+7)+2(4y+5)+4(3z+4)+8(t+3)}} \geq 4\sqrt[4]{2^{4\sqrt[4]{64(5x+\&)(4y+5)(3z+4)(t+3)}}} = 4 \,.\, 2^{\sqrt[4]{64\,.\,4}} = 64$ 3p

Finalizare $x = 3/2$; $y = ¾$; $z = -1$ $t = -5/2$
....2p

Subiectul 3. Inducție matematică: n=1 Vom avea egalitate peste tot 1p

$n = 2$: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1+ab} \leq \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \leq 1 + \dfrac{1}{1+ab}$ și demonstrație 2p

$P(n) \rightarrow P(n+1)$: $\dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{1+x_1x_2 \dots x_{n-1}(x_nx_{n+1})} = \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1+x_1x_2 \dots x_{n-1}(x_nx_{n+1})} \leq \dfrac{1}{1+x_1} + \dots + \dfrac{1}{1+x_{n-1}} + \dfrac{1}{1+x_nx_{n+1}} + \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x_1} + \dots \dfrac{1}{1+x_{n+1}}$..2p

$n + \dfrac{1}{1+x_1 \dots x_{n+1}} = n-1+1+\dfrac{1}{1+x_1x_2 \dots x_{n-1}(x_nx_{n+1})} \geq \dfrac{1}{1+x_1} + \dots + \dfrac{1}{1+x_{n-1}} + \dfrac{1}{1+x_nx_{n+1}} + 1 \geq \dfrac{1}{1+x_1} + \dots + \dfrac{1}{1+x_{n+1}}$....2p

Subiectul 4. a) $h(x) = x^3 + x - 8$ injectivă, rezultă $f \circ f$ injectivă, deci f injectivă..............................2p

Din ipoteză pt $(\forall)$ $y \in \mathbf{R}$, ecuatia $x^3 + x - 8 - y = 0$ are soluție reală, deci $\exists x \in R$,

a.î. $h(x) = y$, adică h este surjectivă, de unde rezultă f surjectivă 2p

f injectivă și surjectivă , deci bijectivă 1p

b) $f(f(f(x))) = f(x^3 + x - 8) = f^3(x) + f(x) - 8$ 1p

pentru $x = 2$ avem $f(2^3 + 2 - 8) = f^3(2) + f(2) - 8$, rezultă $f(2) = 2$..1p

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro