OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a V-a

1. Numerele naturale m şi n au proprietatea că $(2^m + 7^n)$ se divide cu 5.
Arătaţi că numărul $(2^n + 7^m)$ se divide cu 5.

2. Determinați mulțimea:

$M = \{\overline{abc} \mid a \cdot \overline{bc}$ și $b \cdot \overline{ac}$ sunt numere consecutive$\}$.

3. Se consideră numărul:
$A = 1 + 2015 + 2015 \cdot 2016 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + \ldots + 2015 \cdot 2016^{2015}$.

a) Arătați că numărul $a = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015$ este pătrat perfect.
b) Arătați că numărul $b = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2015^2$ este cub perfect.
c) Arătați că A este pătrat perfect și cub perfect.

4. Determinaţi numerele naturale a şi b care verifică relaţia: $a^4 + 5a + 1 = 5^b$.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Fiecare problemă se va nota cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu)*
- *Timp de lucru: 2 ore*

Soluţii clasa a V-a:

1. Notăm: $A = 2^m + 7^n$, $B = 2^n + 7^m$.

Dacă un număr p se divide cu 5, atunci ultima sa cifră $u(p)$ va fi 0 sau 5. Arătăm că dacă
$u(2^m + 7^n) \in \{0,5\}$, atunci și $u(2^n + 7^m) \in \{0,5\}$.

Cazul I $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}^*)$

Dar $u(2^k) = \{2,4,6,8\}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$, iar $u(7^k) = \{1,3,7,9\}, \forall k \in \mathbb{N}$. Ultima cifră $u(n)$:

k	$u(2^k)$	$u(7^k)$
$M4$	6	1
$M4$+1	2	7
$M4$+2	4	9
$M4$+3	8	3

Din condiția $u(2^m + 7^n) \in \{0,5\}$, cu $m \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow (2^m + 7^n)$ impar , deci $u(2^m + 7^n) = 5$.

Cazurile convenabile:

1. (6+9) pentru ($m = M4, n = M4 + 2$);
2. (2+3) pentru ($m = M4 + 1, n = M4 + 3$);
3. (4+1) pentru ($m = M4 + 2, n = M4$);
4. (8+7) pentru ($m = M4 + 3, n = M4 + 1$).

În toate aceste cazuri ultima cifră a numărului B este $u(2^n + 7^m) = 5$.

Cazul II $(\boldsymbol{m = 0})$

Pentru $m = 0$, exercițiul se mai scrie:
Dacă $A = 1 + 7^n$ se divide cu 5, atunci $B = 2^n + 1$ se divide cu 5.
Din $(1 + 7^n) \vdots 5 \Longrightarrow n = M4 + 2$, iar ($2^{M4+2} + 1$)$\vdots$ 5, adică concluzia în cazul $m = 0$.

2. I. Dacă $a \cdot \overline{bc} > b \cdot \overline{ac}$, atunci $a \cdot \overline{bc} - b \cdot \overline{ac} = 1$, de unde obținem $c \cdot (a - b) = 1$. Ultima egalitate este adevărată pentru $c = 1, b \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ și $a = b + 1$.

II. Dacă $b \cdot \overline{ac} > a \cdot \overline{bc}$, atunci $b \cdot \overline{ac} - a \cdot \overline{bc} = 1$, de unde obținem $c \cdot (b - a) = 1$. Ultima egalitate este adevărată pentru $c = 1, a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ și $b = a + 1$. În concluzie:
$M = \{121, 231, 341, 451, 561, 671, 781, 891, 211, 321, 431, 541, 651, 761, 871, 981\}$.

3.a) $a = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015 = 2015 + 2014 \cdot 2015 = 2015 \cdot (1 + 2014) = 2015^2$.

b) $b = 1 + 2014 + 2015 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2015^2 \Rightarrow b = 2015^2 + 2014 \cdot 2015^2 = 2015^2 \cdot (1 + 2014)$.

Adică $b = 2015^3$.

c) $A = 2016 + 2015 \cdot 2016 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$A = 2016(1+2015) + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$A = 2016^2 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$A = 2016^2(1+2015) + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$A = 2016^3 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$

....

$A = 2016^{2015} + 2015 \cdot 2016^{2015} = 2016^{2015}(1+2015) = 2016^{2016}$,

$2016 = 3 \cdot 372, 2016 = 2 \cdot 1008$; $A = \left(2016^{672}\right)^3$, $A = \left(2016^{1008}\right)^2$, deci A este pătrat perfect și cub perfect.

4. Relaţia este echivalentă cu: $a^4 + 5a = 5^b - 1$.
Notăm u(n)=ultima cifră a numărului n.
Atunci u(n^2)$\in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.Rezultă u(n^4)$\in \{0, 1, 5, 6\}$.
Deci u($a^4 + 5a$)$\in \{0, 1, 5, 6\}$. Dar u($5^b - 1$)$\in \{0, 4\}$. Egalitatea are loc numai dacă $b = 0$.
În acest caz relaţia devine $a^4 + 5a = 0$, a cărei singură soluţie naturală este $a = 0$.
Deci, singura soluţie este $a = b = 0$.

Barem de corectare

Clasa a V-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
Un număr p se divide cu 5, atunci ultima sa cifră $u(p) \in \{0,5\}$.	1p
Cazul I ($m \in \mathbb{N}^*$)	
$u(2^k) = \{2,4,8,6\}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, iar $u(7^k) = \{1,7,9,3\}, \forall k \in \mathbb{N}$	1p
Din condiția $u(2^m + 7^n) \in \{0,5\}$, cu $m \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow (2^m + 7^n)$ impar, deci $u(2^m + 7^n) = 5$	1p
(6+9) pentru ($m = M4, n = M4 + 2) \Rightarrow u(B) = 5$;	1p
(2+3) pentru ($m = M4 + 1, n = M4 + 3) \Rightarrow u(B) = 5$;	1p
(4+1) pentru ($m = M4 + 2, n = M4) \Rightarrow u(B) = 5$;	1p
(8+7) pentru ($m = M4 + 3, n = M4 + 1) \Rightarrow u(B) = 5$.	1p
Cazul II ($m = 0$)	2p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1p**
I. Dacă $a \cdot \overline{bc} > b \cdot \overline{ac}$, atunci $a \cdot \overline{bc} - b \cdot \overline{ac} = 1$	1p
$c \cdot (a - b) = 1$	1p
$c = 1, b \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ și $a = b + 1$.	1p
II. Dacă $b \cdot \overline{ac} > a \cdot \overline{bc}$, atunci $b \cdot \overline{ac} - a \cdot \overline{bc} = 1$	1p
$c \cdot (b - a) = 1$	1p
$c = 1, a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ și $b = a + 1$	1p
$M = \{121, 231, 341, 451, 561, 671, 781, 891, 211, 321, 431, 541, 651, 761, 871, 981\}$	3p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
3.a) $a = 2015 + 2014 \cdot 2015 = 2015 \cdot (1 + 2014) = 2015^2$.	2p
b) $b = 2015^2 + 2014 \cdot 2015^2 = 2015^2 \cdot (1 + 2014) = 2015^3$	2p
c) $A = 2016(1 + 2015) + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$	1p
$A = 2016^2 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$	1p
$A = 2016^3 + 2015 \cdot 2016^3 + ... + 2015 \cdot 2016^{2015}$	1p
....	
$A = 2016^{2015} + 2015 \cdot 2016^{2015} = 2016^{2015}(1 + 2015) = 2016^{2016}$	1p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
$a^4 + 5a = 5^b - 1$	1p
u(n^2) $\in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$	2p
u(n^4) $\in \{0, 1, 5, 6\}$	2p
u($a^4 + 5a$) $\in \{0, 1, 5, 6\}$	2p
u($5^b - 1$) $\in \{0, 4\}$	1p
Finalizare: $a = 0$, $b = 0$	1p
TOTAL	**10p**