Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie funcţia $f:\mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9,\ f(x)=x^2.$ Să se determine submulţimile nevide A ale mulţimii $\mathbb{Z}_9$ cu proprietatea $f(A)=A.$

Problema 2.

Se consideră numerele reale a şi b şi funcţia continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ cu proprietatea că $\int_{at}^{bt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)dx,$ oricare ar fi $t\in(0,2).$ Să se arate că $a\cdot f(a)=b\cdot f(b).$

Problema 3.

Fie $n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$ fixat şi mulţimile $H_1=\{A\in M_n(\mathbb{R}) / A^t=A\}$ şi $H_2=\{A\in M_n(\mathbb{R}) / A^t=-A\}.$

a).Să se demonstreze că H_1 şi H_2 sunt subgrupuri ale grupului $(M_n(\mathbb{R}),+).$

b).Să se demonstreze că $(\forall) X\in M_n(\mathbb{R}),$ există $A\in H_1$ şi $B\in H_2$ astfel încât $X=A+B.$

Problema 4.

Fie funcţia $f:(-1,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{-x}{x+1}}+c & ,\ x\in(-1,0]\\ \dfrac{1}{4+\sin x}, & x\in(0,2\pi]\end{cases},\quad c\in\mathbb{R}$

Să se determine $c\in\mathbb{R},$ astfel încât funcţia f să admită primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

22 februarie 2015

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} x & \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} & \hat{7} & \hat{8} \\ \hline f(x) & \hat{0} & \hat{1} & \hat{4} & \hat{0} & \hat{7} & \hat{7} & \hat{0} & \hat{4} & \hat{1} \end{array}$	**1p**
	$\operatorname{Im} f = \{\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{7}\}$	**2p**
	$f(A) = A \subseteq \operatorname{Im} f \Rightarrow A \subseteq \{\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{7}\}$	**2p**
	Submulțimile nevide A ale mulţimii $\mathbb{Z}_9$ cu proprietatea $f(A) = A$ sunt: $\{\hat{0}\},\{\hat{1}\},\{\hat{0},\hat{1}\},\{\hat{4},\hat{7}\},\{\hat{0},\hat{4},\hat{7}\},\{\hat{1},\hat{4},\hat{7}\},\{\hat{0},\hat{1},\hat{4},\hat{7}\}$	**2p**
2.	Din f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie F : $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $f \Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă pe } \mathbb{R} \\ F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$	**2p**
	Fie funcţia $H:(0,2) \to \mathbb{R},\ H(t) = \int_{at}^{bt} f(x)dx = F(bt) - F(at),\ t \in (0,2);$ Din F derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ F continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow H$ continuă şi derivabilă pe $(0,2)$.	**2p**
	$\int_{at}^{bt} f(x)dx \le \int_{a}^{b} f(x)dx \Rightarrow H(t) \le H(1),\ \forall t \in (0,2) \Rightarrow$ $t = 1$ este punct de maxim global pentru funcţia H $\overset{T.Fermat}{\Longrightarrow} H'(1) = 0;$ (1)	**1p**
	Dar $H'(t) = b \cdot F'(b \cdot t) - a \cdot F'(a \cdot t) = b \cdot f(b \cdot t) - a \cdot f(a \cdot t) \Rightarrow$ $H'(1) = b \cdot f(b) - a \cdot f(a)$ (2)	**1p**
	Din (1) şi (2) $\Rightarrow\ b \cdot f(b) - a \cdot f(a) = 0 \Rightarrow b \cdot f(b) = a \cdot f(a)$.	**1p**

3.	a) Fie A, B $\in H_1 \Rightarrow A^t = A$ şi $B^t = B \Rightarrow$ $(A-B)^t = A^t - B^t = A - B \Rightarrow A - B \in H_1 \Rightarrow$ H_1 *subgrup al grupului* $(M_n(\mathbb{R}),+)$. . Fie A, B $\in H_2 \Rightarrow A^t = -A$ si $B^t = -B \Rightarrow$ $(A-B)^t = A^t - B^t = -A + B = -(A-B) \Rightarrow A - B \in H_2 \Rightarrow$ H_2 *subgrup al grupului* $(M_n(\mathbb{R}),+)$.	**2p** 2p
	b). Fie X $\in M_n(\mathbb{R})$. Avem $\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^t\right)^t = \frac{1}{2}X^t + \frac{1}{2}X$, adică A=$\frac{1}{2}\cdot\left(X + X^t\right) \in H_1$, $\left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^t\right)^t = \frac{1}{2}X^t - \frac{1}{2}X = -\left(\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^t\right)$, adică B=$\frac{1}{2}\cdot\left(X - X^t\right) \in H_2$. Evident X=A+B.	**1p** 1p 1p
4.	Orice funcţie continuă admite primitive. Funcţia *f* este continuă pe $(-1,0]$ şi pe $(0,2\pi]$ (compuneri de funcţii elementare). Problema continuităţii funcţiei *f* se pune în *x*=0. Funcţia f este continuă în x=0 dacă f(0-0)=f(0+0)=f(0). Din $f(0-0) = f(0+0) = f(0) \Rightarrow c = \frac{1}{4}$. Pentru $c = \frac{1}{4}$, funcţia f este continuă $\Rightarrow$ f admite primitive. Pentru $c \neq \frac{1}{4}$, *x*= 0 este punct de discontinuitate de speţa I $\Rightarrow$ f nu are primitive.	**1p**
	$\int \sqrt{\frac{-x}{x+1}}dx = \int \frac{-x}{\sqrt{-x^2-x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{-2x-1}{\sqrt{-x^2-x}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-x}}dx =$ $\sqrt{-x^2-x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}dx =$ $\sqrt{-x^2-x} + \frac{1}{2}\arcsin(2x+1) + C,\ C \in \mathbb{R}$.	**2p**

	Funcţia $g(x)=\dfrac{1}{4+\sin x}$, $x\in(0,2\pi]$ este continuă pe $(0,2\pi]\Rightarrow$ g admite primitive pe $(0,2\pi]$. Nu se poate folosi substituţia $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t$ deoarece pentru $x=\pi\in(0,2\pi]$, $tg\dfrac{x}{2}$ nu este definită. Vom construi o primitivă a funcţiei g pe J, $J=(0,\pi)\cup(\pi,2\pi]$. Facem substituţia $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Integrala asociată este $\mathrm{I}=\displaystyle\int\frac{1+t^2}{4t^2+2t+4}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{2t^2+t+2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}dt=$ $\dfrac{2}{\sqrt{15}}arctg\dfrac{4t+1}{\sqrt{15}}+C;$ Construim o primitivă $F:(-1,2\pi]\to\mathbb{R}$ a lui f pe $(-1,2\pi]$, de forma $F(x)=\begin{cases}\sqrt{-x^2-x}+\frac{1}{2}\arcsin(2x+1)+\frac{x}{4}+k_1, & x\in(-1,0)\\ k_2, & x=0\\ \frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{4tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+k_3, & x\in(0,\pi)\\ k_4, & x=\pi\\ \frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{4tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+k_5, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$	**2p**

	Pentru determinarea legăturii dintre constantele $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$ şi k_5, se impune condiţia de continuitate a funcţiei F în $x=0$ şi $x=\pi$.	**1p**

Funcţia F este continuă în $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)=F(0) \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi}{4}+k_1=\frac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\frac{1}{\sqrt{15}}+k_3=k_2;$$

Funcţia F este continuă în $x=\pi \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x<\pi}} F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ x>\pi}} F(x)=F(\pi) \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi}{\sqrt{15}}+k_3=-\frac{\pi}{\sqrt{15}}+k_5=k_4;$$

Fie $k_2=k \Rightarrow$

$$\begin{cases} k_1=k-\dfrac{\pi}{4} \\ k_3=k-\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{15}} \\ k_4=\dfrac{\pi}{\sqrt{15}}+k-\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{15}} \\ \mathrm{k}_5=\dfrac{2\cdot\pi}{\sqrt{15}}+k-\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{15}} \end{cases}$$

deci o primitivă a lui $f\ \ (k=0)$, este:

$$F(x)=\begin{cases} \sqrt{-x^2-x}+\dfrac{1}{2}\arcsin(2x+1)+\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{4}, & x\in(-1,0) \\ 0, & x=0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\dfrac{4\cdot tg\,\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}-\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{15}}, & x\in(0,\pi) \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{15}}-\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{15}}, & x=\pi \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\dfrac{4tg\,\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+\dfrac{2\cdot\pi}{\sqrt{15}}-\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{15}} & x\in(\pi,2\pi] \end{cases}$$

.

Atunci $\int f(x)dx=F(x)+C,\ x\in(-1,2\pi],\ C\in\mathbb{R}.$ **1p**