Clasa a VIII-a

1. a) Verificați identitatea $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinați partea întreagă a numărului

$$a=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}}.$$

2. Dacă $x, y, z, t \in (0,\infty)$ sunt astfel încât $xz = yt = 20$, demonstrați că

$$(x+4)\cdot(y+4)\cdot(z+5)\cdot(t+5) \geq 80^2.$$

3. Pe planul triunghiului dreptunghic ΔABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, se ridică, de aceeași parte, perpendicularele AM și BN. Știind că $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 4$cm, $AM = 2$cm și $BN = 1$cm, determinați distanța de la punctul M la dreapta de intersecție a planelor (ABC) și (MNC).

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a ; notăm $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ și $DB' \cap BO' = \{I\}$.

a) Demonstrați că $(IA') \equiv (IB) \equiv (IC')$.

b) Arătați că $DI \perp (A'BC')$.

c) Calculați lungimea segmentului DI.

Subiect elaborat de prof. Sergiu Prisacariu

Clasa a VIII-a

1. a) Se ridică la pătrat în ambii membri.

b) Folosind punctul a) şi procedeul de sumare telescopică, obținem că $a = 2013 - \frac{1}{2013}$, deci $\lfloor a \rfloor = 2012$.

2. Pentru fiecare dintre paranteze, aplicăm inegalitatea mediilor MA $\geq$ MG; obținem că produsul din membrul stâng este cel puțin egal cu $2^4 \cdot \sqrt{4x \cdot 4y \cdot 5z \cdot 5t} = 80^2$, conform ipotezei. Egalitatea se atinge când $x = y = 4$, iar $z = t = 5$.

3. Dacă $\{D\} = AB \cap MN$, atunci $(ABC) \cap (MNC) = CD$. Din $\Delta AMD \sim \Delta BND$ obținem că $AD = 4\sqrt{3}$ cm, deci $CD = 8$ cm. Fie AT înălțimea triunghiului dreptunghic ACD; avem că $AT = \frac{AC \cdot AD}{CD} = 2\sqrt{3}$ cm. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $MT \perp CD$ şi, din triunghiul dreptunghic AMT, găsim că distanța de la M la dreapta CD este de 4 cm.

4. a) Triunghiul $BA'C'$ este echilateral, iar I se află pe mediana BO'. Deoarece $\Delta IBD \sim \Delta IO'B'$, rezultă că $\frac{IB}{IO'} = \frac{BD}{B'O'} = 2$, prin urmare I este centrul triunghiului $BA'C'$ şi atunci va fi egal depărtat de vârfurile sale.

b) Piramida $DBA'C'$ are baza $BA'C'$ triunghi echilateral şi muchiile laterale congruente, deci este o piramidă regulată. Dreapta care uneşte vârful D cu centrul I al bazei este înălțimea piramidei, aşadar este perpendiculară pe planul bazei.

c) Asemănarea $\Delta IBD \sim \Delta IO'B'$ conduce la $\frac{DI}{IB'} = \frac{BD}{B'O'} = 2$, deci $DI = \frac{2}{3} DB' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.