OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21.02.2016

CLASA A IX-A

SUBIECTUL I (7p)

Fie n un număr natural compus și $1 = d_1 < d_2 < \dots\dots\dots < d_k = n$ divizorii săi naturali , $k \geq 3$. Să se arate că $d_1, d_2, \dots, d_k$ nu sunt în progresie aritmetică.

Gazeta Matematică

SUBIECTUL II (7p)

(2p) a) Determinați $\left[\sqrt{4n^2 - 2n}\,\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) b) Arătați că $\left[\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{4k^2-2k}\}}\right] = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x* și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui *x*).

SUBIECTUL III (7p)

Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, demonstrați că:

$$\frac{xy}{xy + x + y} + \frac{yz}{yz + y + z} + \frac{zx}{zx + z + x} \leq \frac{6 + x^2 + y^2 + z^2}{9}.$$

SUBIECTUL IV (7p)

În triunghiul *ABC* se consideră *M* mijlocul lui $[BC]$ și $G \in (AM)$ astfel încât $\frac{AG}{AM} = k$. Paralela prin *G* la *BC* intersectează *AB* în *D* și *AC* în *E*. Fie $BG \cap CD = \{Q\}$ și $CG \cap BE = \{P\}$.

(2p) a) Arătați că $\frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2}$;

(3p) b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{GQ}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ și scalarul *k* ;

(2p) c) Demonstrați că, dacă *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC* , atunci

$\Delta MPQ \sim \Delta ABC$.

NOTĂ :

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

BAREM DE CORECTARE

ETAPA LOCALĂ - 21.02.2016

CLASA A IX-A

<u>Subiectul I (7p)</u>

Fie n un număr natural compus și $1 = d_1 < d_2 < \dots\dots\dots\dots < d_k = n$ divizorii săi naturali , $k \geq 3$. Să se arate că $d_1, d_2, \dots , d_k$ nu sunt în progresie aritmetică.

Gazeta Matematică

Presupunem că $d_1, d_2, \dots , d_k$ sunt în progresie aritmetică. Pentru $k \geq 4$ avem $d_1 + d_k = d_2 + d_{k-1} = 1 + n$, deci $d_{k-1} = n - (d_2 - 1)$ 2p

Cum d_{k-1}/n , rezultă că $d_{k-1}/(d_2 - 1)$, fals, deoarece $0 < d_2 - 1 < d_{k-1}$ 2p

Pentru $k = 3$, rezultă că $n = p^2$, unde p este număr prim..1p

Cum $d_2 = p$ și $d_3 = p^2$, atunci $p^2 + 1 = 2p$, deci $p = 1$, fals..2p

<u>Subiectul II (7p)</u>

(2p) a) Determinați $\left[\sqrt{4n^2 - 2n}\,\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) b) Arătați că $\left[\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}}\right] = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x).

a) Avem $4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 2n < 4n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $(2n - 1) < \sqrt{4n^2 - 2n} < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 - 2n}\right] = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 2p

b) Trebuie demonstrat că $2 \leq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{4k^2-2k}\right\}} < 3, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este echivalent cu

$\frac{n}{3} < \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{4k^2 - 2k} - (2k - 1)\right) \leq \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$...2p

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3} + 2k - 1\right) < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{4k^2 - 2k} \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} + 2k - 1\right)$..1p

Este suficient să arătăm că $\frac{6k-2}{3} < \sqrt{4k^2 - 2k} \leq \frac{4k-1}{2}, \forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{36k^2-24k+4}{9} < 4k^2 - 2k \leq \frac{16k^2-8k+1}{4}$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow -24k + 16 < 0 \leq 9, \ \forall k \in \mathbb{N}^*$, adevărat......................................2p

Subiectul III (7p)

Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, demonstrați că:

$$\frac{xy}{xy+x+y}+\frac{yz}{yz+y+z}+\frac{zx}{zx+z+x}\le\frac{6+x^2+y^2+z^2}{9}.$$

$\frac{xy}{xy+x+y}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\le\frac{1+x+y}{9},\ x,y\ \in(0,\infty)$ 3p

$\sum\frac{xy}{xy+x+y}\le\frac{3+2(x+y+z)}{9}, x,y,z\in(0,\infty)$ 1p

Cum $2x\le x^2+1,\ 2y\le y^2+1,\ 2z\le z^2+1$

Avem $\sum\frac{xy}{xy+x+y}\le\frac{6+x^2+y^2+z^2}{9}$ 3p

Subiectul IV (7p)

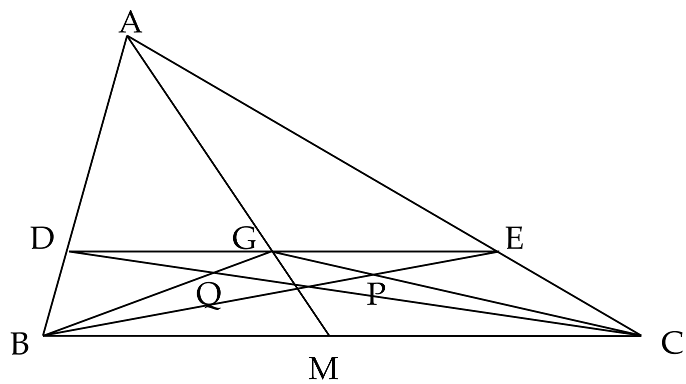
În triunghiul *ABC* se consideră *M* mijlocul lui $[BC]$ și $G\in(AM)$ astfel încât $\frac{AG}{AM}=k$. Paralela prin *G* la *BC* intersectează *AB* în *D* și *AC* în *E*. Fie $BG\cap CD=\{Q\}$ și $CG\cap BE=\{P\}$.

(2p) a) Arătați că $\frac{GQ}{QB}=\frac{k}{2}$;

(3p) b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{GQ}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ și scalarul *k* ;

(2p) c) Demonstrați că, dacă *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC* , atunci

$\Delta MPQ\sim\Delta ABC$.



a) $DG \parallel BC \Rightarrow \Delta DQG \sim \Delta CQB \Rightarrow \frac{GQ}{QB} = \frac{DG}{BC} \Rightarrow \frac{GQ}{QB} = \frac{DG}{2BM}$

Cum $\Delta ADG \sim \Delta ABM$, avem $\frac{DG}{BM} = \frac{AG}{AM} = k$

Deci $\frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2}$ 2p

b) $\frac{AG}{AM} = k \neq 1 \Rightarrow \frac{GA}{GM} = \frac{k}{1-k}$

$$\frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{BQ}{BG} = \frac{2}{k+2} \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{k+2}\overrightarrow{BG} = \frac{2}{k+2}\left(\frac{\overrightarrow{BA} + \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BM}}{1 + \frac{k}{1-k}}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{k+2}\left((k-2)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}\right)$ 2p

Dar $\overrightarrow{GQ} = -\frac{k}{2}\overrightarrow{BQ}$, deci $\overrightarrow{GQ} = -\frac{k}{2(k+2)}\left((k-2)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}\right)$..1p

c) G centrul de greutate al $\Delta ABC \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow MQ \parallel AC(1)$$

Analog $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow MP \parallel AB(2)$ 1p

Se arată că $\frac{GP}{PC} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{GP}{PC} = \frac{GQ}{QB} \Rightarrow PQ \parallel BC(3)$

Din (1) , (2) , (3) $\Rightarrow \Delta MPQ \sim \Delta ABC$ 1p