



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală - 22 februarie 2014 - Maramureș

Clasa a VI-a

1. Dintr-o lungime de 1 km luăm o doime, din rest luăm o treime, din noul rest luăm o pătrime și așa mai departe.

a) După câte operații de acest tip luăm o lungime strict mai mică decât 1 mm

b) După câte operații de acest tip rămâne o lungime mai mică de 1 mm

2. Se consideră numerele  $a_1=4$ ,  $a_2=3a_1+4$ ,  $a_3=3a_2+4^2$ , ...,  $a_{2013}=3a_{2012}+4^{2012}$ .

a) Calculați  $a_{2013}$

b) Arătați că  $(a_1+a_2+\dots+a_{2013}) : \frac{2^{22}-1}{3}$

S:E14.18/G.M. 1/2013

3. Fie unghiurile  $\angle AOB$ ,  $\angle COD$ ,  $\angle EOF$ ,  $\angle GOH$  astfel încât  $[OC]$  este bisectoarea unghiului  $\angle AOB$ ,  $[OB]$  este bisectoarea unghiului  $\angle COD$ ,  $[OE]$  este bisectoarea unghiului  $\angle BOD$ ,  $[OD]$  este bisectoarea unghiului  $\angle EOF$ ,  $[OG]$  este bisectoarea unghiului  $\angle DOF$ ,  $[OF]$  este bisectoarea unghiului  $\angle GOH$ , iar  $m(\angle AOB) + m(\angle COD) + m(\angle EOF) + m(\angle GOH) = 264^\circ$ .

a) Aflați  $m(\angle AOB)$

b) Arătați că  $[OA]$  și  $[OH]$  sunt semidrepte opuse.

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

*Subiecte selectate și prelucrate de: prof. Boga Ovidiu – Lic. Tehn. „Grigore Moisil” Târgu Lăpuș, prof. Pop Mariana – Lic. Teor. „Petru Rareș” Târgu Lăpuș.*

Barem de corectare clasa a VI a

Problema 1

a)  $1 \text{ km} = 1000000 \text{ mm}$  1p

După prima operație rămân  $1000000 \cdot \frac{1}{2}$  1 p

După a doua operație rămân  $1000000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

După (n-1) operații rămân  $1000000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1000000}{n}$  1 p

După n operații luăm  $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1000000}{n} < 1 \Rightarrow n(n+1) > 1000000 \Rightarrow n=1000$  1 p

b) După n operații rămâne  $\frac{1000000}{n+1} < 1 \Rightarrow n > 999999 \quad n=1000000$  3

Problema 2

a)  $a_1=4 \quad a_2=3 \cdot 4 + 4 = 4^2$  1 p

$a_{2013} = 4^{2013}$  1p

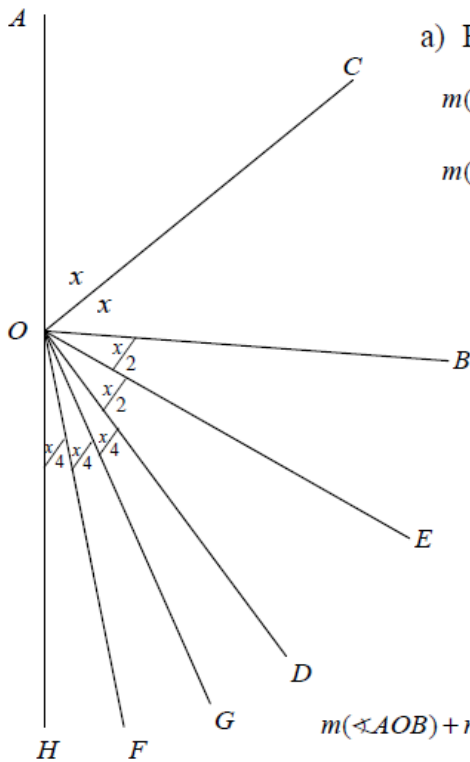
b) Formula sumei progresiei 1p

$4 + 4^2 + \dots + 4^{11} = 4 \frac{4^{11} - 1}{3} = 4 \frac{2^{22} - 1}{3}$  2p

Gruparea după 2013 =  $11 \cdot 183$  1p

Finalizare 1p

**Problema 3.(7 puncte ) (2 puncte desen),  
(3 puncte pentru a),  
(2 puncte pentru b)**



a) Fie  $m(\sphericalangle AOC) = x$ . Avem  $m(\sphericalangle COB) = x$ ,

$$m(\sphericalangle BOE) = \frac{x}{2}, m(\sphericalangle EOD) = \frac{x}{2}, m(\sphericalangle DOG) = \frac{x}{4}$$

$$m(\sphericalangle GOF) = \frac{x}{4}, m(\sphericalangle FOH) = \frac{x}{4}.$$

$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle EOF) + m(\sphericalangle GOH) = 264^\circ$$

$$2x + 2x + x + \frac{x}{2} = 264^\circ \Rightarrow \frac{11x}{4} = 264 \Rightarrow x = 48^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 96^\circ$$

b)  $m(\sphericalangle AOH) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle DOF) + m(\sphericalangle FOH) = 180^\circ \Rightarrow [OA \text{ și } [OH$   
semidrepte opuse.