

Barem de notare – clasa a V-a

**Problema1.** Determinați mulțimile  $A$  și  $B$ , formate din numere naturale, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a)  $A - B = \{2, 5, 6\}$  ;

b)  $B - A = \{0, 7\}$  ;

c)  $\text{card } A \cap B = 3$ ;

d) suma elementelor mulțimii  $A \cup B$  este 28.

**Soluție și barem:**

Din a) $\Rightarrow 2, 5, 6 \in A$ și $2, 5, 6 \notin B$ .	1p
Din b) $\Rightarrow 0, 7 \in B$ și $0, 7 \notin A$ .	1p
Din c) $\Rightarrow A \cap B = \{x_1, x_2, x_3\}$ și utilizând d) obținem $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ .	1p
Cum elementele $x_1, x_2, x_3$ sunt diferite între ele și diferite de 0, 2, 5, 6, 7, obținem $\{x_1; x_2; x_3\} = \{1; 3; 4\}$	2p
$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $B = \{0; 1; 3; 4; 7\}$ .	2p

**Problema 2.** Să se arate că nu există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $1+3+5+\dots+(2n+1)=2^{2017}+2016$ .

**Soluție și barem:**

$1+3+5+\dots+(2n+1)=$ $= 2 \cdot 0+1+2 \cdot 1+1+2 \cdot 2+1+\dots+2 \cdot n+1$ $= 2 \cdot (1+2+3+\dots+n)+(n+1)$ $= n \cdot (n+1)+(n+1)$ $= (n+1)^2$ <p>Suma se poate calcula și aplicând formula progresiei aritmetice.</p> <p>Obținem membrul stâng pătrat perfect.</p>	2p
$U(2^{2017})=2$ $U(2^{2017}+2016)=8$	2p 1p
<p>Dacă ultima cifră a unui număr natural este 2, 3, 7 sau 8, atunci numărul nu este pătrat perfect. Deci, membrul drept nu este pătrat perfect.</p> <p>Cum membrul stâng este pătrat perfect și membrul drept nu este pătrat perfect, atunci nu există <math>n \in \mathbb{N}</math> astfel încât să aibă loc egalitatea.</p>	1p 1p

**Problema 3.** Fie numărul  $A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{2017 \text{ cifre}} + 2017$ .

- a) Arătați că numărul  $A$  este divizibil cu 10;  
 b) Aflați câtul și restul împărțirii numărului  $A$  la 111.

**Soluție și barem:**

$A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{2017 \text{ cifre}} + 2017 =$ $A = (9+1) + (99+1) + (999+1) + \dots + \left( \underbrace{999\dots9}_{2017 \text{ cifre}} + 1 \right)$ <p><b>a)</b></p> $A = 10 + 100 + 1000 + \dots + \underbrace{1000\dots0}_{2017 \text{ de } 0}$ $A = \underbrace{111\dots10}_{2017 \text{ de } 1}$	2p
<p>Cum <math>U(A) = 0 \Rightarrow A</math> este divizibil cu 10.</p>	1p
<p><b>Sau</b></p> <p><b>a)</b></p> $U \left( 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{2017 \text{ cifre}} \right) = U(2017 \cdot 9) = 3$ $U \left( 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{2017 \text{ cifre}} + 2017 \right) = 0$ <p>Obținem că numărul <math>A</math> se termină în 0, deci este divizibil cu 10.</p>	3p

<b>b)</b> $A:111=C \text{ rest } R, 0 \leq R < 111 \Rightarrow A = 111 \cdot C + R, 0 \leq R < 111$	1p
Din punctul a) avem  $A = \underbrace{111 \dots 10}_{2017 \text{ cifre}} =$ $= 111 \cdot 10^{2015} + 111 \cdot 10^{2012} + 111 \cdot 10^{2009} + \dots + 111 \cdot 10^2 + 10$ $= 111 \cdot (10^{2015} + 10^{2012} + 10^{2009} + \dots + 10^2) + 10$	2p
Obținem $C = 10^{2015} + 10^{2012} + 10^{2009} + \dots + 10^2$ și $R = 10$	1p

**Problema 4.** Determinați numerele  $\overline{abcd}$  știind că  $\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{abd} = \overline{abcd}$ .

*Gazeta matematică*

**Soluție și barem:**

$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + \overline{abd} = \overline{abcd}$ , $a, c \neq 0$	1p
$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + 10 \cdot \overline{ab} + d = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$	
$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + d = 90 \cdot \overline{ab} + 10 \cdot c + d$	0,5p
$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 90 \cdot \overline{ab} + 10 \cdot c$	0,5p
$\overline{ab} \cdot \overline{cd} - 90 \cdot \overline{ab} = 10 \cdot c$	0,5p
$\overline{ab} \cdot (\overline{cd} - 90) = 10 \cdot c$	0,5p
$\overline{cd} - 90 > 0 \Rightarrow c = 9$	0,5p
$\overline{ab} \cdot (9d - 90) = 90 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot d = 90$	1p
Cum $d$ este cifră și divizor al lui 90, obținem $d \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$	1,5p
Numerele sunt: $\overline{abcd} \in \{9091, 4592, 3093, 1895, 1596, 1099\}$ .	1p

Barem de notare – clasa a VI-a

**Problema 1.** Numărul  $\overline{aaa8}$  împărțit la un număr de două cifre dă restul 98. Aflați numărul.

*Gazeta matematică*

**Soluție și barem:**

Deoarece împărțitorul are două cifre și este mai mare decât restul, deducem că acesta este 99. **(1,5p)**

Atunci  $\overline{aaa8} = 99c + 98 \Rightarrow \overline{aaa9} = 99(c+1)$  **(2p)**

Obținem  $11|\overline{aaa9}$  și  $\overline{aaa9} = 1100a + \overline{a9}$ . **(2p)**

Cum  $11|\overline{100}$  rezultă  $11|\overline{a9} \Rightarrow a = 9$ . **(1p)**

Numărul căutat este 9998. **(0,5p)**

**Problema 2.** a) Fie șirul  $1, 2, 4, 7, 11, \dots$  de numere naturale.

i) Scrieți următorii doi termeni ai șirului;

ii) Să se determine termenul de pe locul 100.

b) Arătați că numărul:

$$x = 2(1 + 2 + \dots + 100) \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} \right) \text{ este pătrat perfect.}$$

**Soluție și barem:**

a) i)  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 11 \Rightarrow a_2 = a_1 + 1, a_3 = a_2 + 2, a_4 = a_3 + 3, a_5 = a_4 + 4$  **(1p)**

Obținem  $a_6 = a_5 + 5 = 16, a_7 = a_6 + 6 = 22$  **(0,5p)**

ii)  $a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 2, a_4 - a_3 = 3, \dots, a_{100} - a_{99} = 99$  **(1p)**

Adunând relațiile obținem:  $a_{100} - a_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$  **(1,25p)**

Obținem  $a_{100} = 4951$  **(0,25p)**

$$\text{b) } 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} \quad \text{(1p)}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101} \quad \text{(1,25p)}$$

$$x = 2 \cdot \frac{101 \cdot 100}{2} \cdot \frac{100}{101} \quad \text{(0,5p)}$$

$$x = 100^2$$

Deci  $x$  este pătrat perfect. **(0,25p)**

**Problema 3.** . Fie  $A = 2^{3n+1} \cdot 3^n + 15 \cdot 7^n$  și  $B = 2^{4n+2} \cdot 3^{2n+2} + 4 \cdot 5^{2n+2}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

Să se arate că fracția  $\frac{A}{B}$  se simplifică prin 17.

**Soluție și barem:**

Trebuie să demonstrăm că A și B sunt multipli de 17. (1p)

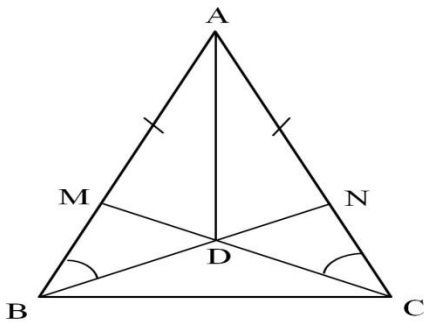
$$A = 2 \cdot 24^n + 15 \cdot 7^n = 2 \cdot (17 + 7)^n + 15 \cdot 7^n = 2 \cdot (M_{17} + 7^n) + 15 \cdot 7^n = M_{17} + 2 \cdot 7^n + 15 \cdot 7^n = M_{17} + 17 \cdot 7^n = M_{17} (3p)$$

$$B = 4 \cdot 16^n \cdot 9 \cdot 9^n + 100 \cdot 25^n = 36 \cdot 144^n + 100 \cdot 25^n = 36 \cdot (136 + 8)^n + 100 \cdot (17 + 8)^n = 36 \cdot (M_{17} + 8^n) + 100 \cdot (M_{17} + 8^n) \\ = M_{17} + 36 \cdot 8^n + 100 \cdot 8^n = M_{17} + 136 \cdot 8^n = M_{17} (3p).$$

**Problema 4.** Fie triunghiul  $ABC$ , isoscel, cu  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $M$  un punct pe latura  $[AB]$  și  $N$  un punct pe latura  $[AC]$  astfel încât  $AM - MB = AN - NC$ . Arătați că:

- $[BN] \equiv [CM]$ ;
- $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAC$ , unde  $BN \cap CM = \{D\}$ .

**Soluție și barem:**



a) Din ipoteză avem că $AM - MB = AN - NC$ . $AB = AC \Rightarrow AM + MB = AN + NC$ . Adunând membru cu membru relațiile, se obține că $2AM = 2AN \Leftrightarrow AM = AN$ .	2,5p
Avem $\triangle ABN \equiv \triangle ACM$ (LUL), de unde rezultă că $[BN] \equiv [CM]$ și $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ACM$	2,5p
b) $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ (LLU), de unde rezultă că	1,5p
$\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD \Rightarrow [AD]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ .	0,5p

Barem de notare – clasa a VII-a

**Problema 1.** Calculați numerele:

$$a = \sqrt{\frac{12}{11} + \frac{13}{22} + \frac{14}{33} + \dots + \frac{110}{1089} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}\right)}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[ \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})} - \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})} \right]$$

**Soluție și barem:**

Notăm: $S_1 = \frac{12}{11} + \frac{13}{22} + \frac{14}{33} + \dots + \frac{110}{1089}$ , sumă ce are $1089:11 = 99$ termeni.	0,25p
Notăm: $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}$ , sumă ce are 99 termeni.	0,25p
Regrupând termenii, obținem $S_1 - S_2 = \left(\frac{12}{11} - 1\right) + \left(\frac{13}{22} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{110}{1089} - \frac{1}{99}\right) \Leftrightarrow$	1p
$S_1 - S_2 = \underbrace{\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11}}_{99 \text{ termeni}} = \frac{1}{11} \cdot 99 = 9.$	1p
Așadar, $a = \sqrt{9} = 3.$	0,5p

$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[ \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} \right]$	1p
$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[ \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} \right]$	0,5p
$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot ( \sqrt{2} + \sqrt{3}  -  \sqrt{2} - \sqrt{3} )$	0,5p
Avem $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ și $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$	0,5p
$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[ \sqrt{2} + \sqrt{3} - (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right]$	0,5p
$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} \Leftrightarrow b = 2$	1p

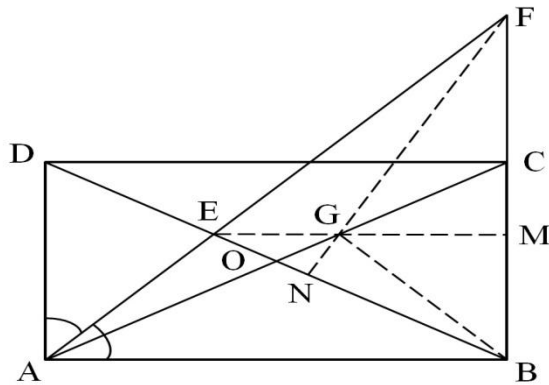
**Problema 2.** Utilizând formula  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , aflați câte soluții, în mulțimea numerelor întregi nenegative, are ecuația  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$ .

**Soluție și barem:**

$\sqrt{1960} = \sqrt{196 \cdot 10} = 14\sqrt{10}$	0,25p
$\sqrt{x} = \sqrt{1960} - \sqrt{y}$ (1) și cum $\sqrt{x} \geq 0$ obținem că $\sqrt{1960} \geq \sqrt{y} \Rightarrow 0 \leq y \leq 1960$ .	0,25p
Ridicând relația (1) la pătrat, obținem $x = 1960 - 28\sqrt{10y} + y \Rightarrow \sqrt{10y} = \frac{1960 + y - x}{28} \in \mathcal{Q}$ .	1,5p
Se aplică proprietatea: dacă $n \in \mathcal{N}$ și $\sqrt{n} \in \mathcal{Q}$ atunci $\sqrt{n} \in \mathcal{N}$ .	1p
Așadar, din $\sqrt{10y} \in \mathcal{Q}$ și $10y \in \mathcal{N} \Rightarrow \sqrt{10y} \in \mathcal{N}$ . Altfel spus, $\exists k \in \mathcal{N}$ astfel încât $\sqrt{10y} = k \Rightarrow 10y = k^2 \Rightarrow 10/k^2 \Rightarrow 10/k$ .	1p
Rezultă că $\exists a \in \mathcal{N}$ astfel încât $k = 10a$ .	0,5p
Din $10y = k^2$ și $k = 10a$ , obținem că $10y = 10^2 a^2 \Rightarrow y = 10a^2, a \in \mathcal{N}$ .	0,5p
Analog, obținem și că $x = 10b^2, b \in \mathcal{N}$ .	0,5p
Ecuția din enunț devine: $\sqrt{10a^2} + \sqrt{10b^2} = 14\sqrt{10} \Rightarrow a + b = 14$ .	0,5p
Cum $a, b \in \mathcal{N} \Rightarrow (a, b) \in \{(0, 14), (1, 13), (2, 12), \dots, (13, 1), (14, 0)\}$ .	0,5p
În concluzie, ecuația dată are 15 soluții în $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ .	0,5p

**Problema 3** Considerăm dreptunghiul  $ABCD$  în care bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAD$  intersectează  $BD$  în  $E$  și  $BC$  în  $F$ . Paralela prin  $E$  la  $AB$  intersectează  $AC$  în punctul  $G$ . Arătați că  $FG \perp BD$ .

**Soluție și barem:**



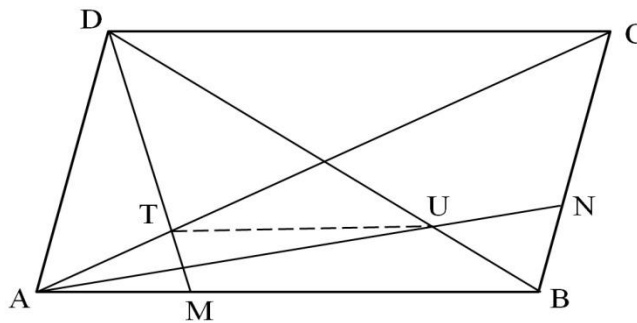
Fie $EG \cap BC = \{M\}$ și $FG \cap BD = \{N\}$ . Din $EM \parallel AB$ și $AB \perp BF \Rightarrow EM \perp BF$ .	0,5p
Deoarece trebuie demonstrat că $FG \perp BD$ și cum $EG \perp BF$ , este suficient de demonstrat că punctul $G$ este ortocentrul triunghiului $EBF$ .	1p
Așadar, trebuie demonstrat că $BG \perp EF$ .	1p
În triunghiul $ABF$ avem că $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$ , de unde rezultă că $\triangle ABF$ este dreptunghic isoscel în $B$ (1)	1p
$ABGE$ trapez isoscel deoarece $EG \parallel AB$ și $AO = OB$ .	1p
Se obține că $m(\sphericalangle GBA) = m(\sphericalangle EAB) = 45^\circ$ , de unde $m(\sphericalangle FBG) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$	1p
Deci obținem că $[BG$ este bisectoarea $\sphericalangle ABF$ (2)	1p
Din (1) și (2) obținem că $BG \perp EF$ q.e.d.	0,5p

**Problema 4.** Fie ABCD un paralelogram. Pe segmentele (AB) și (BC), se iau punctele M, respectiv N, astfel încât  $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{CN}$ .

Dacă  $\{T\} = DM \cap AC$  și  $\{U\} = BD \cap AN$ , demonstrați că  $AB \parallel TU$ .

*Gazeta matematică*

**Soluție și barem:**



În $\triangle ADU$ , $BN \parallel DA \xrightarrow{T.F.A.} \triangle DUA \sim \triangle BUN \Rightarrow \frac{DU}{BU} = \frac{UA}{UN} = \frac{DA}{BN} = \frac{BC}{BN}$ (1)	2,5p
În $\triangle DTC$ , $DC \parallel AM \xrightarrow{T.F.A.} \triangle DTC \sim \triangle MTA \Rightarrow \frac{DT}{MT} = \frac{TC}{TA} = \frac{DC}{MA} = \frac{AB}{MA}$ (2)	2,5p
Din $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{CN} \Rightarrow \frac{AB}{AB - BM} = \frac{BC}{BC - CN} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{BN}$ (3)	0,5p
Din relațiile (1), (2), (3) $\Rightarrow \frac{DU}{BU} = \frac{DT}{MT} \xrightarrow{T.Rec.Th} TU \parallel MB$ .	1p
Cum $M \in (AB)$ obținem că $TU \parallel AB$ .	0,5p

Barem de notare – clasa a VIII-a

**Problema 1.** Să se arate că pentru orice numere reale  $x, y, z > 0$ , cu  $\sqrt{z} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ , este adevărată relația:

$$\frac{x + y - z + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}} \leq \frac{x + y + z + 3}{2}.$$

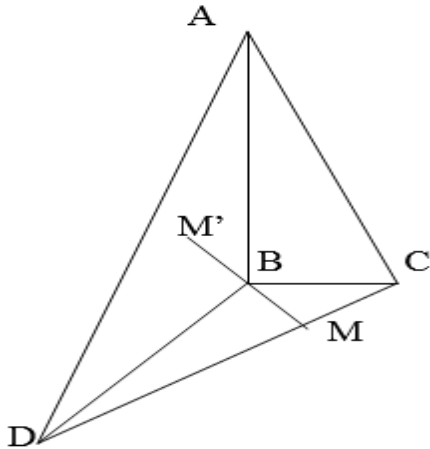
*Gazeta matematică*

**Soluție și barem:**

	Rezolvare	Punctaj
1.	Relația din enunț este echivalentă cu: $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \sqrt{z}^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}} \leq \frac{x + y + z + 3}{2} \Leftrightarrow$	1p
2.	$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})}{(\sqrt{x} + \sqrt{z} - \sqrt{y})} \leq \frac{x + y + z + 3}{2} \Leftrightarrow$	1p
3.	$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \leq \frac{x + y + z + 3}{2} \mid \cdot 2 \Leftrightarrow$	1p
4.	$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{z} \leq x + y + z + 3 \Leftrightarrow$	1p
5.	$\Leftrightarrow 0 \leq x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 + z - 2\sqrt{z} + 1$	2p
6.	$\Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 + (\sqrt{z} - 1)^2.$  Cum ultima relație este adevărată, deoarece este o sumă de numere nenegative, înseamnă că și relația din enunț, care este echivalentă cu ea, este adevărată.	1p

**Problema 2.** În tetraedrul ABCD, cu lungimile muchiilor AB, BC și CA proporționale cu numerele 3,4 respectiv 5, se construiește M' simetricul lui M față de B, unde  $M \in (CD)$ . Arătați că  $AM = AM'$  dacă și numai dacă  $AB \perp (BCD)$ .

**Soluție și barem:**



	Rezolvare	Punctaj
1.	<p><math>(\Rightarrow) AM = AM' \Rightarrow AB \perp (BCD)</math></p> <p>Din <math>AM = AM' \Rightarrow \triangle AMM'</math> este isoscel</p> <p><math>M'</math> simetricul lui <math>M</math> față de <math>B \Rightarrow M'B = MB \Rightarrow [AB]</math> este mediană</p> <p><math>\Rightarrow [AB]</math> este înălțime <math>\Rightarrow AB \perp MM'</math> (1)</p> <p>Din <math>(AB, BC, CA)</math> direct proporționale cu <math>(3,4,5) \Rightarrow AB = 3k,</math></p>	<p>1p</p> <p>1p</p>

	$BC = 4k, CA = 5k \Rightarrow$ conform teoremei reciproce a lui Pitagora $\Rightarrow$  $\Delta ABC$ dreptunghic în $B \Rightarrow AB \perp BC$ (2)  Din (1) și (2) $\Rightarrow AB \perp (BCD)$	1p  1p
2.	$(\Leftarrow) AB \perp (BCD) \Rightarrow AM = AM'$  Din $M'$ simetricul lui $M$ față de $B \Rightarrow M'B = MB \Rightarrow [AB]$ este mediană  Din $AB \perp (BCD) \Rightarrow [AB]$ este înălțime  $\Rightarrow \Delta AMM'$ este isoscel $\Rightarrow AM = AM'$ .	1p  1p  1p

**Problema 3.** Într-o urnă se află o bilă cu cifra 1 înscrisă pe ea , două bile cu cifra 2 înscrisă pe fiecare dintre ele și așa mai departe , n bile cu numărul n înscris pe fiecare dintre ele . Se extrag două bile și probabilitatea ca suma numerelor de pe cele două bile extrase să fie  $2n-1$  este  $\frac{1}{9}$ .

Calculați n.

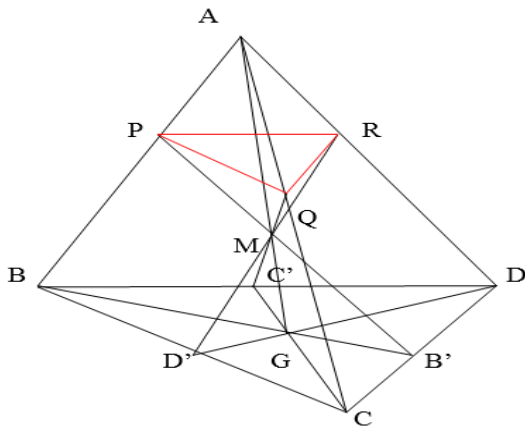
**Soluție și barem:**

	Rezolvare	Punctaj
1.	În urnă se află $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ bile.	1 p
2.	Numărul total de cazuri este:  $1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+1)}{2} \left[ \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] \cdot \frac{1}{2} =$ $= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 2)}{8} = \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{8}.$	3p
3.	Pentru a calcula numărul cazurilor favorabile trebuie să ținem cont că suma $2n-1$ se poate obține doar dacă pe una din bile este scris $n-1$ și pe cealaltă $n$ , deci sunt $n(n-1)$ cazuri favorabile.	1 p
4.	$P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. total de cazuri}} = \frac{n(n-1)}{\frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{8}} = \frac{1}{9}$ $\frac{8}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{9} \Rightarrow (n+1)(n+2) = 8 \cdot 9 \Rightarrow n = 7.$	2 p

**Problema 4.** Fie A, B, C, D puncte necoplanare, G centrul de greutate al triunghiului BCD și punctul  $M \in (AG)$ . Fie  $\{P\} = AB \cap (CDM)$ ,  $\{Q\} = AC \cap (BDM)$  și  $\{R\} = AD \cap (BCM)$ .

- a) Arătați că  $\frac{AM}{GM} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$ ;      b) Demonstrați că  $(PQR) \parallel (BCD)$ .

**Soluție și barem:**



	Rezolvare	Punctaj
1.	<p>G centrul de greutate al triunghiului BCD <math>\Rightarrow D'G = \frac{1}{3} \cdot DD' \Rightarrow \frac{DD'}{D'G} = 3</math>.</p> <p>În <math>\triangle ABB' \Rightarrow B'M \cap AB = \{P\} \Rightarrow P \in AB, P \in B'M</math></p> <p><math>B' \in CD, CD \subset (CDM) \Rightarrow B' \in (CDM)</math></p> <p><math>M \in (CDM)</math></p> <p><math>\Rightarrow \{P\} = AB \cap (CDM)</math>.</p> <p>Analog, <math>D'M \cap AD = \{R\} \Rightarrow \{R\} = AD \cap (BCM)</math>,</p> <p><math>C'M \cap AC = \{Q\} \Rightarrow \{Q\} = AC \cap (BDM)</math>.</p>	2p
2.	<p>În <math>\triangle ADG</math>, cu transversala <math>RD' \Rightarrow</math> conform teoremei lui Menelaus <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{AR}{RD} \cdot \frac{DD'}{D'G} \cdot \frac{MG}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MG} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}</math>. (1)</p>	2p
3.	<p>În <math>\triangle ABG</math>, cu transversala <math>PB' \Rightarrow</math> conform teoremei lui Menelaus <math>\Rightarrow</math></p>	1p

$\Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'G} \cdot \frac{MG}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{MG} = 3 \cdot \frac{AP}{PB} \cdot (2)$ $\left. \begin{array}{l} \text{Din (1)} \Rightarrow \frac{AR}{DR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{MG} \\ \text{Din (1)} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AM}{MG} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RD} \Rightarrow \text{conform teoremei}$ $\left. \begin{array}{l} \text{reciproce a lui Thales} \Rightarrow PR \parallel BD \\ \text{Analog} \Rightarrow PQ \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow (PQR) \parallel (BCD)$	<p>1p</p> <p>1p</p>
---	---------------------