VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

XII. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ deriválható függvényt, ha

$$f(1) = e \quad \text{és} \quad f^{'}(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x \quad \text{bármely } x > 0 \text{ esetén!}$$

(MatLap)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A megadott feltételt rendre a következő formába írhatjuk:

$$\frac{xf^{'}(x)}{x} = \frac{xf(x)}{x} + \frac{f(x)}{x} + \frac{x \cdot e^x}{x} | : x$$

$$\frac{xf^{'}(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} + \frac{e^x}{x}. \quad (1)$$

(2 pont)

Tekintsük a $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ függvényt. A g deriválható, mert két deriválható függvény aránya, és

$$g^{'}(x) = \frac{xf^{'}(x) - f(x)}{x^2}$$

(1 pont)

bármely $x > 0$ esetén. Így az (1)-es összefüggés a $g^{'}(x) = g(x) + \dfrac{e^x}{x}$ alakba írható. Beszorozva a kapott összefüggést e^{-x}-nel ($e^{-x} \neq 0, \forall x > 0$) azt kapjuk, hogy

$$g^{'}(x) \cdot e^{-x} = g(x) \cdot e^{-x} + \frac{1}{x} \quad \text{vagyis, hogy}$$

$$g^{'}(x) \cdot e^{-x} - g(x) \cdot e^{-x} = \frac{1}{x}, \quad \text{azaz}$$

$$\left(g(x) \cdot e^{-x}\right)^{'} = (\ln x)^{'}, \forall x > 0.$$

(3 pont)

Innen azt kapjuk, hogy $g(x) \cdot e^{-x} = \ln x + k$, ahol $k \in \mathbb{R}$. (2) **(1 pont)**

Mivel $f(1) = e \Longrightarrow g(1) = \dfrac{f(1)}{1} = \dfrac{e}{1} = e.$ **(1 pont)**

A (2)-es összefüggésbe $x = 1$-et behelyettesítve következik, hogy $g(1) \cdot e^{-1} = \ln 1 + k$, ahonnan azt kapjuk, hogy $k = 1$. Tehát $g(x) \cdot e^{-x} = \ln x + 1, \forall x > 0$ esetén. Innen az következik, hogy $g(x) = e^x(\ln x + 1)$, miből azt kapjuk, hogy $f(x) = xe^x(\ln x + 1), \forall x > 0$ esetén. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). a) Adott a $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ ax+b & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^* \right\}$ halmaz, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Határozd meg azokat az a és b számokat, amelyekre a $(G_1, \cdot)$ Abel-féle csoport!

b) Határozd meg azokat az $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre a $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^* \right\}$ halmaz csoportot alkot a mátrixok szorzásával!

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Jelöljük a G_1 halmaz elemeit $A(x)$-szel, ahol $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ ax+b & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

A mátrixok szorzása művelet a G_1 halmazon (G_1 zárt részhalmaza az $M_2(\mathbb{R})$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve), ha

$$A(x) \cdot A(y) \in G_1, \quad \text{bármely } A(x), A(y) \in G_1 \text{ esetén} \qquad (1)$$

$$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ ax+b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ ay+b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ axy+(a+b)y+b & 1 \end{pmatrix} \in G_1.$$

Ekkor az (1) $\iff axy + (a+b)y + b = axy + b, \forall x, y \in \mathbb{R}^* \iff a + b = 0 \iff b = -a$.

Tehát a $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a(x-1) & 1 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}^* \right\}$ zárt részhalmaza az $M_2(\mathbb{R})$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve és $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$ bármely $A(x), A(y) \in G_1$ esetén. (2) **(1 pont)**

Mivel a mátrixok szorzása asszociatív művelet az $M_2(\mathbb{R})$ halmazon, ezért annak G_1 részhalmazán is az. (3) **(1 pont)**

Mivel $I_2 = A(1) \in G_1$ és I_2 a mátrixok szorzásának semleges eleme, ezért I_2 semleges elem a szorzásra nézve a G_1 halmazban is. (4) **(1 pont)**

Ha $A(x) \in G_1$, akkor $A(x) \cdot A\left(\frac{1}{x}\right) = A\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = A(1) = I_2$ és $A\left(\frac{1}{x}\right) \cdot A(x) = I_2$, tehát $A(x)$ invertálható $M_2(\mathbb{R})$-ben, és $[A(x)]^{-1} = A\left(\frac{1}{x}\right)$. Mivel $A\left(\frac{1}{x}\right) \in G_1$ bármely $x \in \mathbb{R}^*$ esetén, ezért a G_1 minden eleme invertálható G_1-ben is. (5) **(1 pont)**

Mivel $A(x) \cdot A(y) = A(xy) = A(yx) = A(y) \cdot A(x)$, bármely $A(x), A(y) \in G_1$ esetén, ezért a G_1-beli mátrixok szorzása kommutatív művelet. (6)

A $(3), (4), (5), (6)$ alapján $(G_1, \cdot)$ Abel-féle csoport. **(1 pont)**

b) Jelöljük a G_2 halmaz elemeit $B(x)$-szel, ahol $B(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

G_2 akkor stabil részhalmaza az $M_2(\mathbb{R})$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve, ha

$$B(x) \cdot B(y) \in G_2, \quad \text{bármely} \quad B(x), B(y) \in G_2 \text{ esetén} \qquad (7)$$

$$B(x) \cdot B(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ f(y) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ yf(x) + f(y) & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$(7) \Longleftrightarrow yf(x) + f(y) = f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}^*. \qquad (8)$$

Felcserélve az x és y szerepét a (8)-ban azt kapjuk, hogy

$$xf(y) + f(x) = f(yx), \forall x, y \in \mathbb{R}^* \qquad (9)$$

(**2 pont**)

Ekkor a (8) és (9) $\Longrightarrow yf(x) + f(y) = xf(y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^*$

$$\Longleftrightarrow (x-1)f(y) = (y-1)f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Ha $y = 2$, azt kapjuk, hogy $f(x) = a(x-1)$, ahol $a = f(2)$. (**1 pont**)

Az $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = a(x-1)$ függvény teljesíti a (8)-as feltételt, tehát a $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ a(x-1) & 1 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}^* \right\}$ halmaz egyenlő a feladat $a)$ alpontjánál meghatározott halmazzal, és mivel $(G_1, \cdot)$ Abel- féle csoport, következik, hogy $(G_2, \cdot)$ is Abel- féle csoport. (**1 pont**)

Megjegyzés. Az $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ és a $(G_2, \cdot)$ csoportok izomorfak. Az izomorfizmust a $\varphi : \mathbb{R}^* \to G_2$, $\varphi(x) = A(x)$ függvény biztosítja.

■

3. feladat (10 pont)**.** Határozd meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^{1517}}{x^{2024}+1}$ függvény primitívjeit!

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

I. megoldás:

A $t = x^{506}$ változócserét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^{1517}}{x^{2024}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{506}\int \frac{x^{1012}}{(x^{506})^4+1} \cdot 506 \cdot x^{505}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{506}\int \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$$

(**2 pont**)

$$= \frac{1}{506}\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2 - 2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{506}\int \frac{t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}\,\mathrm{d}t$$

(**1 pont**)

A $\dfrac{t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \dfrac{at+b}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \dfrac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$ alakú felbontásban közös nevezőre hozás és az együtthatók egyenlővé tétele után a

$$\begin{cases} a+c & =0 \\ \sqrt{2}a+b-\sqrt{2}c+d & =1 \\ a+\sqrt{2}b+c-\sqrt{2}d & =0 \\ b+d & =0 \end{cases}$$

(1 pont)

egyenletrendszerhez jutunk, amit ha megoldunk, azt kapjuk, hogy $a=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, b=0, c=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ és $d=0$. **(1 pont)**

Tehát

$$\int \frac{t^2}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int \frac{2t-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2t+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int \frac{(t^2-\sqrt{2}t+1)'}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t + \sqrt{2}\cdot\int \frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t\right) -$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int \frac{(t^2+\sqrt{2}t+1)'}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t - \sqrt{2}\cdot\int \frac{1}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t\right) =$$

(1 pont)

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln(t^2-\sqrt{2}t+1) + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) -$$

(1 pont)

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln(t^2+\sqrt{2}t+1) - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) + C =$$

(1 pont)

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + 2 \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t - 1) + 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t + 1\right)\right) + C$$

Végezetül azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^{1517}}{x^{2024}+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2024\sqrt{2}} \ln \frac{x^{1012} - \sqrt{2}x^{506} + 1}{x^{1012} + \sqrt{2}x^{506} + 1} + \frac{1}{1012\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x^{506} - 1) + \frac{1}{1012\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x^{506} + 1) + C.$$

(1 pont)

II. megoldás:

Külön meghatározzuk az f primitívjeit a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon.

Ha $x \in (-\infty, 0)$ vagy $x \in (0, \infty)$, akkor

$$\int \frac{x^{1517}}{x^{2024}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{506} \int \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{ahol} \quad t = x^{506}.$$

(2 pont)

Tekintsük az $I = \int \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ és a $J = \int \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ integrálokat. **(1 pont)**

$$I + J = \int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t - \frac{1}{t})'}{(t - \frac{1}{t})^2 + 2}\,\mathrm{d}t\,,$$

ami egyenlő

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{2}} + C.$$

(1 pont)

Ugyanakkor

$$I - J = \int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t + \frac{1}{t})'}{(t + \frac{1}{t})^2 - 2}\,\mathrm{d}t\,,$$

ami egyenlő

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t + \frac{1}{t} - \sqrt{2}}{t + \frac{1}{t} + \sqrt{2}} \right| + C.$$

(1 pont)

Összeadva és elosztva 2-vel következik, hogy

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t + \frac{1}{t} - \sqrt{2}}{t + \frac{1}{t} + \sqrt{2}} \right| + C.$$

(**1 pont**)

Tehát az f primitív függvényei a következő alakúak:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1012\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x^{1012}-1}{\sqrt{2}x^{506}} + \dfrac{1}{2024\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^{1012}-\sqrt{2}x^{506}+1}{x^{1012}+\sqrt{2}x^{506}+1} + k_1 & x < 0 \\ k_2 & x = 0 \\ \dfrac{1}{1012\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x^{1012}-1}{\sqrt{2}x^{506}} + \dfrac{1}{2024\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^{1012}-\sqrt{2}x^{506}+1}{x^{1012}+\sqrt{2}x^{506}+1} + k_3 & x > 0 \end{cases}$$

(**1 pont**)

Az F csak akkor lehet primitívje az f-nek, ha folytonos és deriválható az $\mathbb{R}$-en. Felírva, hogy $F_b(0) = F_j(0) = F(0)$, következik, hogy

$$\frac{1}{1012\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + k_1 = k_2 = \frac{1}{1012\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + k_3.$$

(**1 pont**)

Tehát

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1012\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x^{1012}-1}{\sqrt{2}x^{506}} + \dfrac{1}{2024\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^{1012}-\sqrt{2}x^{506}+1}{x^{1012}+\sqrt{2}x^{506}+1} + k & x \neq 0 \\ k - \dfrac{\pi}{2024\sqrt{2}} & x = 0. \end{cases}$$

Belátható, hogy F deriválható, és $F^{'}(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont)**.** Igazold, hogy a 2024-nek van olyan többszöröse, amelyben a $0, 1, 2, ..., 9$ számjegyek mindegyike szerepel!

(Dávid Géza, Székelyudvarhely)

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

I. megoldás:

Tekintsük az $a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, a_4 = 1111, ...$ számok sorozatát. Ezek közt biztosan van két olyan a_k és $a_l, k < l$, amelyeknek a 2024-gyel való osztási maradéka megegyezik. Az $a_l - a_k$ osztható 2024-gyel, és $a_l - a_k = \overline{\underbrace{111...1}_{l-k}\underbrace{000...0}_{k}}$ alakú. Tehát van a 2024-nek olyan többszöröse, amely csak 0-s és 1-es számjegyekből áll. (**4 pont**)

Tekintsük a 2024-nek azt az x többszörösét, amelyet az előző eljárással megkaptunk, amely csak 0-s és 1-es számjegyekből áll. Tegyük fel, hogy ebben a többszörösben n darab 1-es és k darab 0-s szerepel. Ekkor

$$x = \overline{\underbrace{111...1}_{n}} \cdot 10^k = \frac{(10^n - 1) \cdot 10^k}{9}.$$

Most tekintsük a következő számokat:

$$a_1 = x, a_2 = 2 \cdot 10^n \cdot x, a_3 = 3 \cdot 10^{2n} \cdot x, ..., a_9 = 9 \cdot 10^{8n} \cdot x$$

(3 pont)

Ezek a számok mind oszthatóak 2024-gyel, és az összegük

$$999...9888...8777...76...3222...2111...1000...0$$

alakú, ami szintén osztható 2024-gyel.

Tehát a 2024-nek van olyan többszöröse, amelyben a $0, 1, 2, ..., 9$ számjegyek mindegyike szerepel. **(2 pont)**

II. megoldás:

Az $1 \cdot 2024 = 2024, 2 \cdot 2024 = 4048, 3 \cdot 2024 = 6072, 4 \cdot 2024 = 8096, 5 \cdot 2024 = 10120$ szorzatok eredményei között minden számjegy szerepel, kivéve a 3 és 5 számjegyeket.

Azonban az $5 \cdot 2024 = 10120$ szorzatból kiindulva a $3 \cdot 5 \cdot 2024 = 3 \cdot 10120$ illetve $5 \cdot 5 \cdot 2024 = 5 \cdot 10120$ szorzatokban már szerepel a 3 és 5 számjegy. (1) **(2 pont)**

Ha $A = \overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$ és $B = \overline{b_1 b_2 b_3 ... b_m}$, akkor

$$10^m \cdot A + B = \overline{a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m} \qquad (2)$$

(3 pont)

Az (1) és (2) alapján

$$\left(10^{k_1} \cdot 1 + 10^{k_2} \cdot 2 + 10^{k_3} \cdot 3 + 10^{k_4} \cdot 4 + 10^{k_5} \cdot 5 + 10^{k_6} \cdot 15 + 25\right) \cdot 2024$$

megfelelő, ahol

$$k_6 = a \quad 25 \cdot 2024 \quad \text{számjegyeinek a számával, azaz 5-tel,}$$

$$k_5 = 5 + k_6$$

$$k_4 = 4 + k_5$$

$$k_3 = 4 + k_4$$

$$k_2 = 4 + k_3$$

$$k_1 = 4 + k_2.$$

(4 pont)

■