1. a) Va rezulta $f_a(f_b(x,y)) = f_a[((-1)^b x + b, (-1)^b y)] = ((-1)^{a+b}x + (-1)^a b + +a, (-1)^{a+b}y)$. Ca să verifice partea stabilă ar trebui ca $(-1)^{(-1)^a b + a} = (-1)^{a+b}$, care se verifică luând cazurile de paritate și imparitate pentru a *și* b.

   Deci
   $$f_a \circ f_b = f_{(-1)^a b + a} \in F$$
   ……………………………………………………………………………………3p

   b) Se observă că operația nu este comutativă, deoarece numărul $(-1)^a b + a$ poate fi diferit de numărul $(-1)^b a + b$ (de exemplu a = 3, b=2) deci perechea $(F,\circ)$ nu poate forma grup comutativ………………………………………………………… 4p

2. Dacă f este automorfism atunci $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ (care se verifică) și f bijectivă. Deci f este surjectivă și pentru $I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ există $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $f(X) = I_2 \Leftrightarrow AX = I_2$, deci $det\ A \cdot det\ X = 1$ și $det\ A \neq 0$, adică A inversabilă.
   ……………………………………………………………………………………4p

   Dacă A este inversabilă, atunci f bijectivă (relația $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ se verifică)

   f injectivă: $AX = AY$ și prin înmulțire la stânga cu A^{-1} rezultă $X = Y$

   f surjectivă: $\forall\, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ \exists\, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = Y$, deci $X = A^{-1}Y$
   ……………………………………………………………………………………3p

3. Cu notația $\frac{\pi}{2} - x = $ t rezultă

   $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 t + \cos t}{\cos t + \sin t + 1}$ dt = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos\ t + \sin\ t - sin^2 t - \sin\ t}{\cos t + \sin t + 1}$ dt =

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{sin^2 t + \sin t}{\cos t + sin\ t + 1}\right) dt = \frac{\pi}{2} - I$$

   Deci $2I = \frac{\pi}{2}$ și I = $\frac{\pi}{4}$
   ……………………………………………………………………………………7p

4. a) Fie $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

   Conform ipotezei $0 = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{A}{4}x^4\Big|_{-a}^{a} + \frac{B}{3}x^3\Big|_{-a}^{a} + \frac{C}{2}x^2\Big|_{-a}^{a} + Dx\Big|_{-a}^{a} =$
   $= \frac{2}{3}Ba^3 + 2Da$ de unde $Ba^2 + 3D = 0$

   Expresia $E = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = A\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3\right] +$
   $+ B\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right] + C\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\right] + 3D = Ba^2 + 3D = 0$
   ……………………………………………………………………………………4p

   b) Funcția f este continuă și are deci proprietatea lui Darboux; dacă ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții pe intervalul $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$ atunci $f(x) > 0$ pe acest interval sau $f(x) < 0$ *pe acest interval* deci $E > 0$ *pe intervalul dat* sau $E < 0$ pe intervalul dat,

fapt care contrazice rezultatul obținut la punctul a). Prin urmare ecuația are cel puțin o soluție în intervalul menționat.
…………………………………………………………………………………3p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a XII-a

Subiecte:

1. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_n(x,y) = ((-1)^n x + n, (-1)^n y)$, $n \in \mathbb{Z}$ și mulțimea $F = \{f_n | n \in \mathbb{Z}\}$.
   a) Arătați că F este parte stabilă față de compunerea funcțiilor.
   b) Studiați dacă perechea $(F, \circ)$ formează grup comutativ, unde "$\circ$" reprezintă compunerea funcțiilor.

   Burtea Marius, Alexandria, Teleorman

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(X) = AX$. Să se arate că f este automorfism al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ dacă și numai dacă matricea A este inversabilă.

3. Să se calculeze:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f$(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, unde\ A, B, C, D \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că există $a > 0$ astfel încât

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

   a) Determinați $E = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$
   b) Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$

   Traian Ianculescu, Zimnicea, Teleorman

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.