OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- 22 februarie 2015

Clasa a VI – a

SUBIECTUL I (7 p)

a) Să se calculeze:

$$\left[2{,}1(6)+1\frac{1}{2}:0{,}(3)\right]\cdot\left(2-\frac{4}{5}\right)^2-9\cdot 2014^0$$

b) Să se determine numerele naturale a şi b, pentru care sunt satisfăcute relaţiile: $(a,b)=15$ şi $a+b=240$.

SUBIECTUL II (7 p)

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, iar M şi N două puncte pe dreapta BC astfel încât B să fie între M şi C, iar C între B şi N. Ştiind că $AM=AN$, să se demonstreze că:

a) $BM=CN$

b) $PN=QM$, unde P şi Q sunt respectiv mijloacele laturilor $[AB],[AC]$

c) $PM=QN$

d) Dacă $MQ\cap NP=\{O\}$, să se arate că punctul O aparţine bisectoarei unghiului MAN.

SUBIECTUL III (7 p)

Fie numerele raționale :

$$A=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2013}}+\frac{1}{2^{2014}}\right)\cdot\left(1+1+2+2^2+\cdots+2^{2013}\right) \text{ și}$$

$B=\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{2013}+2^{2014}+2^{2015}}{1+2^2+2^4+\cdots+2^{2014}}-2$. Să se calculeze B + A - 2^{2015}.

SUBIECTUL IV (7 p)

Determinați numere prime p pentru care p+2, p^2+4, p^3+2 și p^4-2 sunt simultan numere prime.

GM. Nr. 4/2013

NOTĂ: Timp de lucru – **2 ore**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

Clasa a VI-a Barem de notare

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.a	Transformările fracţiilor zecimale în fracţii ordinare: $2,1(6)=2\frac{15}{90}=2\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$ şi $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	1p
	$2,1(6)+1\frac{1}{2}:0,(3)=\frac{13}{6}+\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=\frac{40}{6}$	1p
	$\left(2-\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$	1p
	Finalizare: $\frac{40}{6}\cdot\frac{36}{25}-9\cdot 1=\frac{3}{5}$	1p
1.b	$(a,b)=15\Rightarrow$ există $x,y\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=15\cdot x$, $b=15\cdot y$, $(x,y)=1$ Din $a+b=240$ obţinem $15\cdot x+15\cdot y=240$	1p
	$x+y=16$, $(x,y)=1\Rightarrow$ $(x,y)\in\{(1,15),(15,1),(3,13),(13,3),(5,11),(11,5),(7,9),(9,7)\}$	1p
	$(a,b)\in\{(15,225),(225,15),(45,195),(195,45),(75,165),(165,75)\}\cup$ $\cup\{(105,135),(135,105)\}$	1p
2.	**a)** Din ΔABC *isoscel* $\Rightarrow\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle ACB\Rightarrow\sphericalangle ABM\equiv\sphericalangle ACN$ ΔAMN *isoscel* $\Rightarrow\sphericalangle AMB\equiv\sphericalangle ANC$ Conform cazului LUU $\Rightarrow\Delta AMB\equiv\Delta ANC\Rightarrow MB=NC$; $\sphericalangle MAB\equiv\sphericalangle NAC$	2p
	b) Conform cazului LUL $\Rightarrow\Delta PNB\equiv\Delta QMC\Rightarrow PN=QM$; $\sphericalangle PNB\equiv\sphericalangle QMC$	2p

2	**c)** Conform cazului LUL $\Rightarrow \Delta MBP \equiv \Delta NCQ \Rightarrow MP = NQ$	2p
	d) $\sphericalangle PNB \equiv \sphericalangle QMC \Rightarrow \Delta MON\ isoscel \Rightarrow MO = NO$ Dar $OP = PN - ON;\ OQ = MQ - OM \Rightarrow OP = OQ$ Conform cazului LLL $\Rightarrow \Delta AOP \equiv \Delta AOQ \Rightarrow \sphericalangle PAO \equiv \sphericalangle QAO$ Dar şi $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC \Rightarrow \sphericalangle MAO \equiv \sphericalangle NAO$	1p
3	Calculăm a doua paranteză din A: $1+1+2+2^2+...+2^{2013} = (2+2)+2^2+...+2^{2013} = \left(2^2+2^2\right)+2^3+...+2^{2013} =$ $= ... = 2^{2013}+2^{2013} = 2^{2014}$	2p
	Aducând în prima paranteză la acelaşi numitor avem: $A = \frac{2^{2014}+2^{2013}+...+2+1}{2^{2014}} \cdot 2^{2014} =$ $= 2^{2015} - 1$	2p
	$B = \frac{2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1}{1+2^2+2^4+...+2^{2014}} - 2;$ Fie S=$2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1$ Atunci $2 \cdot$S=$2^{2016}+2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2 \Rightarrow$ $2 \cdot$S=$2^{2016}+S+1 \Rightarrow S = 2^{2016}-1\ \ (1)$ Fie T=$1+2^2+2^4+...+2^{2014}$ Atunci 4T=$2^2+2^4+...+2^{2014}+2^{2016} \Rightarrow$ $4T = 2^{2016}+T-1 \Rightarrow 3T = 2^{2016}-1 \Rightarrow T = \frac{2^{2016}-1}{3}\ \ (2)$ $B = \frac{2^{2016}-1}{\frac{2^{2016}-1}{3}} - 2 = 3-2 = 1;$	2p
	Finalizare: $B + A - 2^{2015} = 0.$	1p

4	Pentru $p=3$ avem numerele 5, 13, 29 și 79, care sunt, toate, numere prime.	2p
	Pentru $p=5$ avem numărul $p^4-2=623$, care se divide cu 7.	1p
	Demonstrăm că pentru $p>5$, număr prim, nu toate cele patru numere sunt prime. Dacă $p>5$, atunci $p=5\cdot k+1$, $p=5\cdot k+2$, $p=5\cdot k+3$ sau $p=5\cdot k+4$, $k\geq 1$ ($p=5\cdot k$, $k>1$, nu sunt numere prime). Dacă $p=5\cdot k+1$, atunci $p^2+4=(5\cdot k+1)^2+4=\mathrm{M}_5+1+4=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+2$, atunci $p^3+2=(5\cdot k+2)^3+2=\mathrm{M}_5+2^3+2=\mathrm{M}_5+10=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+3$, atunci $p+2=5\cdot k+3+2=\mathrm{M}_5+5=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+4$,atunci $p^2+4=(5\cdot k+4)^2+4=\mathrm{M}_5+4^2+4=\mathrm{M}_5+20=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim. Singura soluție este $p=3$.	1p