MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a X-a

Problema 1. Pentru $a \in (0, \infty)\backslash\{1\}$, aflați soluțiile reale ale ecuației

$$a^x = x^x + \log_a(\log_a x).$$

Problema 2. Arătați că, oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2, are loc inegalitatea

$$| z_1 + z_2 | + | z_1 - z_2 | \leq |z_1| + |z_2| + \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Problema 3. Fie $Z \subset \mathbb{C}$ o mulțime de n numere complexe, $n \geq 2$. Arătați că pentru orice număr natural nenul $m \leq \dfrac{n}{2}$ există o submulțime U cu m elemente a mulțimii Z astfel ca

$$\left|\sum_{z \in U} z\right| \leq \left|\sum_{z \in Z\backslash U} z\right|.$$

Problema 4. Fie $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \geq 2$ și $\mathcal{P}(M) = \{P \mid P \subseteq M\}$ mulțimea părților lui M. Determinați numărul funcțiilor $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ care au proprietatea:

$$|f(A) \cap f(B)| = |A \cap B|, \text{ pentru orice } A, B \in \mathcal{P}(M).$$

(Am notat cu $|X|$ numărul de elemente ale mulțimii X.)

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a X-a – soluții și bareme

Problema 1. *Pentru* $a \in (0,\infty)\setminus\{1\}$*, aflați soluțiile reale ale ecuației*

$$a^x = x^x + \log_a(\log_a x).$$

Soluție. Fie $t = \log_a x$. Din condițiile de existență avem $x > 0$ și $t > 0$. Ecuația se rescrie $a^x = a^{\log_a(x^x)} + \log_a t$, adică $a^x = a^{xt} + \log_a t$. **2p**

Adunând $\log_a x$ obținem $a^x + log_a x = a^{xt} + \log_a(xt)$. **2p**

Funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a^x + \log_a x$ este strict monotonă, deci injectivă, prin urmare obținem $x = xt$, deci $t = 1$ și $x = a$. **3p**

Problema 2. *Arătați că, oricare ar fi numerele complexe* z_1 *și* z_2*, are loc inegalitatea*

$$\mid z_1 + z_2 \mid + \mid z_1 - z_2 \mid \le |z_1| + |z_2| + \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Soluție. Dacă $z_1 = 0$ sau $z_2 = 0$ avem egalitate. În continuare considerăm $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune $|z_1| \le |z_2|$. Astfel, inegalitatea devine $\mid z_1 + z_2 \mid + \mid z_1 - z_2 \mid \le |z_1| + 2|z_2|$. (1) **2p**

Împărțind cu $|z_2|$ și notând $z = \frac{z_1}{z_2}$, inegalitatea (1) se scrie $\mid z+1 \mid + \mid z-1 \mid \le |z| + 2$, unde $z \in \mathbb{C}^*$ cu $|z| \le 1$. (2) **1p**

Ridicând la pătrat și folosind identitatea paralelogramului, $\mid z+1 \mid^2 + \mid z-1 \mid^2 = 2(|z|^2+1)$, inegalitatea (2) devine echivalentă cu $|z|^2 + 2|z^2 - 1| \le 4|z| + 2$. **2p**

Cum $|z^2 - 1| \le |z|^2 + 1$, este suficient să demonstrăm că $|z|^2 + 2(|z|^2 + 1) \le 4|z| + 2$, care conduce la $|z|(3|z| - 4) \le 0$, inegalitate adevărată deoarece $|z| \in (0, 1]$. **2p**

Problema 3. *Fie* $Z \subset \mathbb{C}$ *o mulțime de* n *numere complexe,* $n \ge 2$*. Arătați că pentru orice număr natural nenul* $m \le \dfrac{n}{2}$ *există o submulțime* U *cu* m *elemente a mulțimii* Z *astfel ca*

$$\left|\sum_{z\in U} z\right| \le \left|\sum_{z\in Z\setminus U} z\right|.$$

Soluție. Dacă $m = \dfrac{n}{2}$, deci $n = 2m$ este număr par, partiționăm arbitrar mulțimea Z în două submulțimi Z_1 și Z_2 cu câte m elemente și dacă $\left|\displaystyle\sum_{z_1\in Z_1} z_1\right| \le \left|\displaystyle\sum_{z_2\in Z_2} z_2\right|$ alegem $U = Z_1$ iar în caz contrar alegem $U = Z_2$. **1p**

Dacă $m < \dfrac{n}{2}$, deci $2m < n$, presupunem prin absurd că pentru orice submulțime $U \subset Z$ cu m elemente și $V = Z \setminus U$ avem inegalitatea contrară: $\left|\sum\limits_{u\in U} u\right| > \left|\sum\limits_{v\in V} v\right|$, adică

$\sum\limits_{u\in U} |u|^2 + \sum\limits_{\substack{u_1\neq u_2\\ u_{1,2}\in U}} u_1 \cdot \overline{u_2} > \sum\limits_{v\in V} |v|^2 + \sum\limits_{\substack{v_1\neq v_2\\ v_{1,2}\in V}} v_1 \cdot \overline{v_2}$. **1p**

Adunând aceste relații pentru toate cele C_n^m submulțimi U și notând $S_1 = \sum\limits_{z\in Z} |z|^2$, $S_2 = \sum\limits_{\substack{z_1\neq z_2\\ z_{1,2}\in Z}} z_1 \cdot \overline{z_2}$, obținem:

$$\frac{C_n^m \cdot m}{n} \cdot S_1 + \frac{C_n^m \cdot A_m^2}{A_n^2} \cdot S_2 > \frac{C_n^m \cdot (n-m)}{n} \cdot S_1 + \frac{C_n^m \cdot A_{n-m}^2}{A_n^2} \cdot S_2.$$

.... **3p**

Deducem că $\dfrac{n-2m}{n} \cdot S_1 + \dfrac{A_{n-m}^2 - A_m^2}{A_n^2} \cdot S_2 < 0$, adică $\dfrac{n-2m}{n} \cdot (S_1 + S_2) < 0$, deci $S_1 + S_2 < 0$, prin urmare $\left|\sum\limits_{z\in Z} z\right|^2 < 0$, ceea ce este fals. **2p**

Problema 4. *Fie $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \geq 2$ și $\mathcal{P}(M) = \{P \mid P \subseteq M\}$ mulțimea părților lui M. Determinați numărul funcțiilor $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ care au proprietatea:*

$$|f(A) \cap f(B)| = |A \cap B|, \text{ pentru orice } A, B \in \mathcal{P}(M).$$

(Am notat cu $|X|$ numărul de elemente ale mulțimii X.)

Soluție. Pentru $A = B$ în relația din ipoteză avem $|f(A)| = |f(A) \cap f(A)| = |A \cap A| = |A|$, deci $|f(A)| = |A|$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(M)$. În particular, observăm că $f(\emptyset) = \emptyset$.

Pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$ avem $|f(\{i\}) \cap f(\{j\})| = |\{i\} \cap \{j\}| = 0$, deci $f(\{i\}) \neq f(\{j\})$. Cum $f(\{i\})$ are un element, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, vom avea $f(\{i\}) = \{a_i\}$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $a_1, a_2, \ldots a_n$ este o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, n$.
.... **1p**

Arătăm mai departe că orice funcție cu proprietatea din ipoteză este complet definită de valorile ei pe mulțimile de un element și că pentru orice permutare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a numerelor $1, 2, \ldots, n$ o astfel de funcție verifică.

Dacă $B \subset A$, atunci $A \cap B = B$, deci $|A \cap B| = |B|$ și atunci $|f(B)| = |B| = |A \cap B| = |f(A) \cap f(B)|$. Cum însă $f(A) \cap f(B) \subset f(B)$, avem $f(B) = f(A) \cap f(B)$, deci $f(B) \subset f(A)$. Fie $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \in \mathcal{P}(M)$ o submulțime oarecare. Atunci, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ avem $\{b_i\} \subset A$, deci $\{a_{b_i}\} = f(\{b_i\}) \subset f(A)$. Atunci $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} \{a_{b_i}\} \subset f(A)$. Dar $k = |f(A)| = \left|\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} \{a_{b_i}\}\right|$, deci $f(A) = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant k} \{a_{b_i}\} = \{a_{b_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. **3p**

Reciproc, pentru orice astfel de funcție, dată de o permutare oarecare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a numerelor $1, 2, \ldots, n$, și pentru orice mulțimi $A = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ și $B = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$, numărul de elemente comune ale mulțimilor $f(A) = \{a_{b_1}, a_{b_2}, \ldots, a_{b_k}\}$ și $f(B) = \{a_{c_1}, a_{c_2}, \ldots, a_{c_p}\}$ este egal cu numărul de indici comuni dintre $b_1, b_2, \ldots, b_k$ și $c_1, c_2, \ldots, c_p$, adică $|A \cap B|$. **2p**

Așadar, numărul de funcții căutate este $p_n = n!$. **1p**