

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-28.02.2015
Clasa a VII-a

1. Se dau numerele:

$$x = 2 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2015 \cdot 2016} \right)$$

$$y = \left(\frac{1008}{3 - \sqrt{2}} + \frac{2016}{4 + \sqrt{2}} \right)^{-2} \cdot \frac{1008^3}{44 - \sqrt{2015}}$$

$$z = \sqrt{\sqrt{2017} \cdot (\sqrt{2017} - \sqrt{2015}) - \sqrt{2015} \cdot (\sqrt{2017} - \sqrt{2015})} - \sqrt{(44 - \sqrt{2017})^2}$$

Arătați că xyz este număr natural.

2. Fie a, b, c, d, x, y, z, t numere reale astfel încât:

$$x = bcd + \frac{1}{a}, \quad y = acd + \frac{1}{b}, \quad z = abd + \frac{1}{c}, \quad t = abc + \frac{1}{d}$$

și $ax + by + cz + dt = 1$.

Să se calculeze: $abcd$ și $xyzt$.

GM, Supliment cu exerciții, octombrie 2014

3. În triunghiul isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$, iar M este mijlocul laturii AB . Paralela prin M la înălțimea AD a triunghiului, intersectează dreapta AC în punctul E . Dacă $\triangle AME$ este echilateral, se cere să:

a) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

b) Demonstrați că $AEMD$ este romb.

c) Arătați că $AE = \frac{1}{3} CE$.

d) Arătați că $S_{AEMD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

NOTĂ:

- Timp de lucru 2 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu maxim 7 puncte.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ-28.02.2015

Clasa a VII-a
Barem de corectare

1	$x = 2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \right)$	1 punct
	$x = \frac{2015}{1008}$	1 punct
	$y = \left(\frac{1008}{3-\sqrt{2}} + \frac{2016}{4+\sqrt{2}} \right)^{-2} \cdot \frac{1008^3}{44-\sqrt{2015}} = \frac{1008}{44-\sqrt{2015}}$	2 puncte
	$z = 44 - \sqrt{2015}$ $xyz = 2015 \in N$	2 puncte 1 punct
2	$ax = abcd + 1$ $by = abcd + 1$ $cz = abcd + 1$ $dt = abcd + 1$	2 puncte
	$4abcd = ax + by + cz + dt - 4$	1 punct
	$abcd = -\frac{3}{4}$	1 punct
	$abcdxyzt = (abcd + 1)^4$	2 puncte
	$xyzt = -\frac{1}{192}$	1 punct
	3	Desenul
a) $m(\angle A) = 120^\circ$; $m(\angle B) = m(\angle C) = 30^\circ$	1 punct	
b) D mijlocul laturii BC, $[MD]$ linie mijlocie în triunghiul ABC justificarea faptului că AEMD este romb	1 punct 1 punct	
c) $AE = AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$ $CE = AE + AC = AE + 2AE = 3AE$	1 punct 1 punct	
d) $S_{AEMD} = 2S_{ADM} = S_{ADB} = \frac{1}{2}S_{ABC}$	1 punct	