BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Se consideră numerele raționale pozitive:

$$x=1\frac{1}{99}+2\frac{2}{99}+3\frac{3}{99}+...+98\frac{98}{99} \text{ și. } y=\frac{21}{97}+\frac{2121}{9797}+\frac{212121}{979797}.$$

a) Arătați că x este pătrat perfect;
b) Comparați numerele x și y.

Ana Marcela Popa, Rădăuți

***Soluție*. a)** $x=\frac{1\cdot 99+1}{99}+\frac{2\cdot 99+2}{99}+\frac{3\cdot 99+3}{99}+...+\frac{98\cdot 99+98}{99}=\frac{1\cdot(99+1)}{99}+\frac{2\cdot(99+1)}{99}+\frac{3\cdot(99+1)}{99}+...+\frac{98\cdot(99+1)}{99}=$

$=\frac{1\cdot 100}{99}+\frac{2\cdot 100}{99}+\frac{3\cdot 100}{99}+...+\frac{98\cdot 100}{99}=\frac{100}{99}+\frac{200}{99}+\frac{300}{99}+...+\frac{9800}{99}=\frac{100+200+300+...+9800}{99}=$

$=\frac{100\cdot(1+2+3+...+98)}{99}=\frac{100\cdot\frac{98\cdot 99}{2}}{99}=100\cdot\frac{\cancel{98}^{49}\cdot\cancel{99}^{1}}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{1}{\cancel{99}_{1}}=4900=70^2$ care este pătrat perfect.

b) $y=\frac{21}{97}+\frac{2121}{9797}+\frac{212121}{979797}=\frac{21}{97}+\frac{21\cdot\cancel{101}^{1}}{97\cdot\cancel{101}_{1}}+\frac{21\cdot\cancel{10101}^{1}}{97\cdot\cancel{10101}_{1}}=\frac{21}{97}+\frac{21}{97}+\frac{21}{97}=3\cdot\frac{21}{97}=\frac{63}{97}<1$.

Avem $x=4900>1$ și $y=\frac{63}{97}<1$, deci $y<x$.

***Soluția 2*: ** Pentru calculul lui x.

$x=\left(1+\frac{1}{99}\right)+\left(2+\frac{2}{99}\right)+\left(3+\frac{3}{99}\right)+...+\left(98+\frac{98}{99}\right)=(1+2+3+...+98)+\left(\frac{1}{99}+\frac{2}{99}+\frac{3}{99}+...+\frac{98}{99}\right)=$

$=\frac{98\cdot 99}{2}+\frac{1+2+3+...+98}{99}=\frac{98\cdot 99}{2}+\frac{\frac{98\cdot 99}{2}}{99}=\frac{98\cdot 99}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{99}\right)=\frac{\cancel{98}^{49}\cdot\cancel{99}^{1}}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{100}{\cancel{99}_{1}}=49\cdot 100=(7\cdot 10)^2=70^2$

Barem.

Aduce x la forma $x=\frac{100+200+300+...+9800}{99}$	**2p**
Finalizează calculele și găsește $x=70^2$ pătrat perfect	**2p**
Aduce y la forma $y=\frac{63}{97}$	**2p**
$x=4900>1$ și $y=\frac{63}{97}<1$, deci $y<x$	**1p**

2. Să se demonstreze că numărul $A=4\cdot 15^n+4\cdot 134^n+34^{2n+1}$ este divizibil cu 7, pentru orice număr natural n.

Gabriala Sascău, Rădăuți

Soluție. Vom folosi: $(a+1)^k=M_a+1,\ \forall a,k\in\mathbb{N}$ și $(a-1)^{2p+1}=M_a-1,\ \forall a\in\mathbb{N}^*, p\in\mathbb{N}$.

$A=4\cdot(14+1)^n+4\cdot(133+1)^n+(35-1)^{2n+1}=4\cdot(M_7+1)^n+4\cdot(M_7+1)^n+(M_7-1)^{2n+1}=$

$=4\cdot(M_7+1)+4\cdot(M_7+1)+(M_7-1)=4\cdot M_7+4+4\cdot M_7+4+M_7-1=M_7+7=M_7$. Deci $A=M_7,\forall n\in\mathbb{N}$.

Barem.

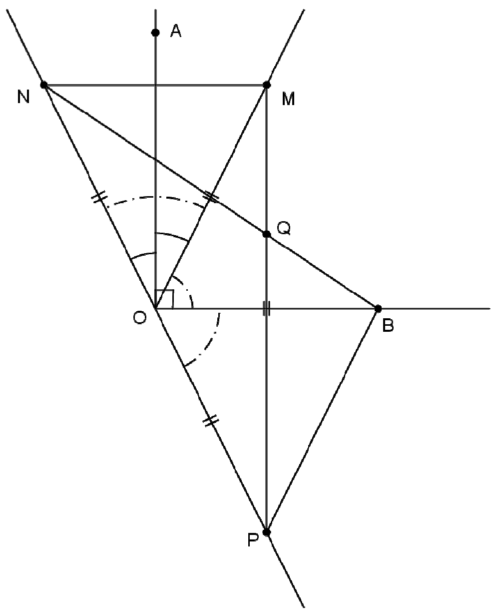
Arată că $15^n=(14+1)^n=(M_7+1)^n=M_7+1$	**2p**
Arată că $134^n=(133+1)^n=(M_7+1)^n=M_7+1$	**2p**
Arată că $34^{2n+1}=(35-1)^{2n+1}=(M_7-1)^{2n+1}=M_7-1$	**2p**
Arată că $A=4\cdot(M_7+1)+4\cdot(M_7+1)+(M_7-1)=4\cdot M_7+4+4\cdot M_7+4+M_7-1=M_7+7=M_7,\ \forall n\in\mathbb{N}$	**1p**

3. Se consideră unghiul drept AOB și semidreptele $(OM$, $(ON$, $(OP$ astfel încât $(OA$ este bisectoarea unghiului MON, $(OB$ este bisectoarea unghiului MOP, iar $(OM$ este bisectoarea unghiului NOB. Dacă $[OM]\equiv[ON]\equiv[OP]\equiv[OB]$, atunci:

a) realizați figura corespunzătoare datelor problemei;
b) arătați că punctele N, O și P sunt coliniare;
c) arătați că $\Delta MOP \equiv \Delta NOB$;
d) arătați că $\Delta NMQ \equiv \Delta PBQ$, unde $\{Q\} = MP \cap NB$.

Dorel Ispăşoiu, Gura Humorului

Soluție. **a)**



b) $(OA$ bisectoarea $\sphericalangle MON \Rightarrow (OA \subset Int(\sphericalangle MON)$ și

$$m(\sphericalangle NOA) = m(\sphericalangle AOM) = \frac{m(\sphericalangle NOM)}{2} = a.$$

$(OB$ bisectoarea $\sphericalangle MOP \Rightarrow (OA \subset Int(\sphericalangle MOP)$ și

$$m(\sphericalangle MOB) = m(\sphericalangle BOP) = \frac{m(\sphericalangle MOP)}{2} = b.$$

$m(\sphericalangle AOB) = 90° \Rightarrow m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOB) = 90° \Rightarrow a+b = 90°$.

$(OM$ bisectoarea $\sphericalangle NOB \Rightarrow (OM \subset Int(\sphericalangle NOB)$ și

$$m(\sphericalangle NOM) = m(\sphericalangle MOB) = \frac{m(\sphericalangle NOB)}{2} \quad (1).$$

$m(\sphericalangle NOP) = m(\sphericalangle NOM) + m(\sphericalangle MOP) = 2a + 2b = 2(a+b) = 180° \Rightarrow$ punctele N, O și P sunt coliniare.

c) Din relația (1) $\Rightarrow 2a = b$. Dar $a+b=90°$ și atunci obținem $3a = 90° \Rightarrow a = 30°$ și $b = 60°$.

Din $[OM]\equiv[ON]$ (ipoteză), $[OP]\equiv[OB]$ (ipoteză) și $\sphericalangle MOP \equiv \sphericalangle NOB$ (au măsurile de $120°$) $\overset{L.U.L.}{\Rightarrow} \Delta MOP \equiv \Delta NOB$.

d) Din $\Delta MOP \equiv \Delta NOB \Rightarrow [MP]\equiv[NB]$ (2)**.**

Din $[ON]\equiv[OB]$ (ipoteză), $[OM]\equiv[OP]$ (ipoteză) și $\sphericalangle NOM \equiv \sphericalangle BOP$ (au măsurile de $60°$) $\overset{L.U.L.}{\Rightarrow} \Delta NOM \equiv \Delta BOP \Rightarrow [NM]\equiv[BP]$ (3).

Din $[MP]\equiv[NB]$ (din (2)), $[NM]\equiv[BP]$ (din (3)) și $[NP]\equiv[NP]$ (latură comună) $\overset{L.L.L.}{\Rightarrow} \Delta NMP \equiv \Delta PBN \Rightarrow$

$\sphericalangle NMP \equiv \sphericalangle PBN$ (4).

Din $[NM]\equiv[BP]$ (din (3)), $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle PBQ$ (din (4)) și $\sphericalangle MQN \equiv \sphericalangle BQP$ (opuse la vârf) $\overset{L.U.U.}{\Rightarrow} \Delta MNQ \equiv \Delta BPQ$.

Barem.

a) Figura	**1p**
b) Calculează $m(\sphericalangle NOP) = m(\sphericalangle NOM) + m(\sphericalangle MOP) = 2a+2b = 2(a+b) = 180° \Rightarrow$ punctele N, O și P sunt coliniare	**2p**
c) Arată că $\Delta MOP \equiv \Delta NOB$ conform cazului L.U.L.……………………………………………………....	**1p**
d) Arată că $\Delta NOM \equiv \Delta BOP$ $(L.U.L.)$ …………………………..	**1p**
Arată că $\Delta NMP \equiv \Delta PBN$ $(L.L.L.)$ ………………………..	**1p**
Arată că $\Delta NMQ \equiv \Delta PBQ$ $(L.U.U.)$ ………………………..	**1p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
16 februarie 2013

CLASA a VI-a

1. Se consideră numerele raționale pozitive:

$$x = 1\frac{1}{99} + 2\frac{2}{99} + 3\frac{3}{99} + \ldots + 98\frac{98}{99} \text{ și } y = \frac{21}{97} + \frac{2121}{9797} + \frac{212121}{979797}.$$

a) Arătați că x este pătrat perfect;

b) Comparați numerele x și y.

2. Să se demonstreze că numărul $A = 4 \cdot 15^n + 4 \cdot 134^n + 34^{2n+1}$ este divizibil cu 7, pentru orice număr natural n.

3. Se consideră unghiul drept AOB și semidreptele $(OM$, $(ON$, $(OP$ astfel încât $(OA$ este bisectoarea unghiului MON, $(OB$ este bisectoarea unghiului MOP, iar $(OM$ este bisectoarea unghiului NOB. Dacă $[OM] \equiv [ON] \equiv [OP] \equiv [OB]$, atunci:

a) realizați figura corespunzătoare datelor problemei;

b) arătați că punctele N, O și P sunt coliniare;

c) arătați că $\Delta MOP \equiv \Delta NOB$;

d) arătați că $\Delta NMQ \equiv \Delta PBQ$, unde $\{Q\} = MP \cap NB$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2 ore.