OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a IX – a

Problema 1. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $a, n \in \mathbb{N}^*$, au loc:

a) $|x+a| + |x-a^2| \geq a^2 + a$;

b) $|x+1| + |x+2| + \ldots + |x+n| + |x-1^2| + |x-2^2| + \ldots + |x-n^2| \geq \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Problema 2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \cdot \{x\} = 1\}$. Demonstraţi că:

a) dacă $x \in A$, atunci $x^2 = [x]^2 + \{x\}^2 + 2$;

b) dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{2016} \in A$ şi $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2016}$, atunci

$$\{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2016}^2\} = \{x_1\}^2 + \{x_2\}^2 + \ldots + \{x_{2016}\}^2.$$

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie 27 m^2 şi O intersecţia diagonalelor sale. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA sunt vârfurile unui paralelogram a cărui arie se cere.

Problema 4. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ şi $(AC) \cap (BD) = \{O\}$. Dacă $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât punctele M, O şi N să fie coliniare, atunci:

a) exprimaţi vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OD}$;

b) demonstraţi că $\dfrac{AB}{CD} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{NB}{CN} + \dfrac{MA}{DM}\right)$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

Problema 1. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $a, n \in \mathbb{N}^*$, au loc:

a) $|x+a| + |x-a^2| \geq a^2 + a$;

b) $|x+1| + |x+2| + \ldots + |x+n| + |x-1^2| + |x-2^2| + \ldots + |x-n^2| \geq \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Barem de corectare.

(2*p*) *a*) $|x+a| + |x-a^2| \geq |x+a+a^2-x| = a^2+a$;

b) Membrul stâng al relaţiei se scrie:

(2*p*) $\sum\limits_{k=1}^{n} (|x+k| + |x-k^2|) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} (k^2+k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} k$

(2*p*) $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}$

(1*p*) $= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Problema 2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \cdot \{x\} = 1\}$. Demonstraţi că:

a) dacă $x \in A$, atunci $x^2 = [x]^2 + \{x\}^2 + 2$;

b) dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{2016} \in A$ şi $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2016}$, atunci

$$\{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2016}^2\} = \{x_1\}^2 + \{x_2\}^2 + \ldots + \{x_{2016}\}^2.$$

Barem de corectare.

(2*p*) *a*) $x^2 = ([x] + \{x\})^2 = [x]^2 + \{x\}^2 + 2 \cdot [x] \cdot \{x\} = [x]^2 + \{x\}^2 + 2$

(1*p*) *b*) Dacă $x \in A$, atunci $[x] = \dfrac{1}{\{x\}} \geq 2$,

(1*p*) iar dacă $x, y \in A$, atunci $x < y \Rightarrow [x] < [y]$.

(2*p*) Fie acum $x_1, x_2, \ldots, x_{2016} \in A$, cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2016}$. Atunci $[x_1] < [x_2] < \ldots < [x_{2016}]$, de unde, pentru fiecare $k \in \{1, 2, ..., 2016\}$, avem $[x_k] \geq k+1$, adică $\{x_k\}^2 = \dfrac{1}{[x_k]^2} \leq \dfrac{1}{(k+1)^2}$. Deci

$$\sum_{k=1}^{2016} \{x_k\}^2 \leq \sum_{k=1}^{2016} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{2016} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2017} < 1, \text{ adică } \left\{\sum_{k=1}^{2016} \{x_k\}^2\right\} = \sum_{k=1}^{2016} \{x_k\}^2.$$

(1*p*) Aşadar, $\left\{\sum\limits_{k=1}^{2016} {x_k}^2\right\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{2016} [x_k]^2 + 2 \cdot 2016 + \sum\limits_{k=1}^{2016} \{x_k\}^2\right\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{2016} \{x_k\}^2\right\} = \sum\limits_{k=1}^{2016} \{x_k\}^2$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie 27 m^2 şi O intersecţia diagonalelor sale. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA sunt vârfurile unui paralelogram a cărui arie se cere.

Barem de corectare. Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD respectiv, DOA şi P un punct oarecare în plan. Avem:

(2p) $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{PG_2} - \overrightarrow{PG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC})$

(2p) $\overrightarrow{G_4G_3} = \overrightarrow{PG_3} - \overrightarrow{PG_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC})$

(1p) Deci $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_4G_3}$, adică $G_1G_2G_3G_4$ este un paralelogram.

(1p) Analog se arată că $\overrightarrow{G_2G_3} = \overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BD})$, adică paralelogramul $G_1G_2G_3G_4$ are laturile paralele cu diagonalele patrulaterului $ABCD$.

(1p) $A_{[G_1G_2G_3G_4]} = G_1G_2 \cdot G_1G_4 \cdot \sin(\widehat{G_1G_2, G_1G_4}) = \frac{1}{3}AC \cdot \frac{1}{3}BD \cdot \sin(\widehat{AC, BD}) = \frac{2}{9} \cdot A_{[ABCD]} = 6\ m^2$.

Problema 4. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ şi $(AC) \cap (BD) = \{O\}$. Dacă $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât punctele M, O şi N să fie coliniare, atunci:

a) exprimaţi vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OD}$;

b) demonstraţi că $\frac{AB}{CD} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{NB}{CN} + \frac{MA}{DM}\right)$.

Barem de corectare.

(2p) Notăm $\frac{AB}{CD} = k$, $\frac{NB}{CN} = q$, $\frac{MA}{DM} = p$. Din asemănarea triunghiurilor $\Delta AOB \sim \Delta COD$ rezultă că $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$, de unde, $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = -k \cdot \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB} = -k \cdot \overrightarrow{OD} \end{cases}$

(2p) Din $\frac{MA}{DM} = p$, se obţine că $\overrightarrow{OM} = \frac{-k \cdot \overrightarrow{OC} + p \cdot \overrightarrow{OD}}{1+p}$,

iar din $\frac{NB}{CN} = q$, se obţine că $\overrightarrow{ON} = \frac{-k \cdot \overrightarrow{OD} + q \cdot \overrightarrow{OC}}{1+q}$.

(1p) Deoarece vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ sunt coliniari, rezultă că $\frac{-k}{q} = \frac{p}{-k}$, adică $k^2 = pq$.

(2p) Aşadar, $k = \sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}$, de unde se obţine că $\frac{AB}{CD} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{NB}{CN} + \frac{MA}{DM}\right)$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.