INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 21.02.2016

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

a) Scrieţi trei numere reale x, y, z, unul să fie raţional negativ, iar celelalte două să fie iraţionale, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 27$.

b) Fie x, y, z numere reale, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 27$. Arătaţi că $|x + y + z| \leq 9$.

G.M.

SUBIECTUL 2

a) Dacă x este număr real şi $x(x + 1) = 12$, calculaţi valoarea expresiei $E(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$.

b) Arătaţi că $A = \sqrt{a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a}$ este iraţional, oricare ar fi a număr natural nenul.

S.G.M.

SUBIECTUL 3

Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia de lungime 10 cm. Dacă M este mijlocul muchiei [B'C'], iar N este mijlocul muchiei [C'D'], aflaţi distanţa de la punctul C' la planul (ABM) şi cosinusul unghiului format de dreptele AM şi BN.

SUBIECTUL 4

Într-o prismă triunghiulară regulată ABCA'B'C' raportul dintre latura bazei şi înălţime este $\sqrt{2}$. Se notează cu M mijlocul muchiei [BC]. Arătaţi că $B'C \perp C'A$ şi $(B'AC) \perp (AMC')$.

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

a) **Scrieţi trei numere reale x, y, z, unul să fie raţional negativ, iar celelalte două să fie iraţionale, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 27$.**

b) **Fie x, y, z numere reale, astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 27$. Arătaţi că $|x + y + z| \le 9$.**

a) Un exemplu scris astfel: $x = -4 \in \mathbb{Q}_-$, $y = \sqrt{5} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $z = \sqrt{6} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.	**3p**
b) Se ştie că $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.	**2p**
De unde $xy + yz + zx \le 27$, $2xy + 2yz + 2zx \le 54$ şi $(x + y + z)^2 \le 81$.	**1p**
rezultă $\|x + y + z\| \le 9$.	**1p**

OBS: Dacă alege metoda reducerii la absurd se utilizează aceeaşi inegalitate de **2p**: $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$.

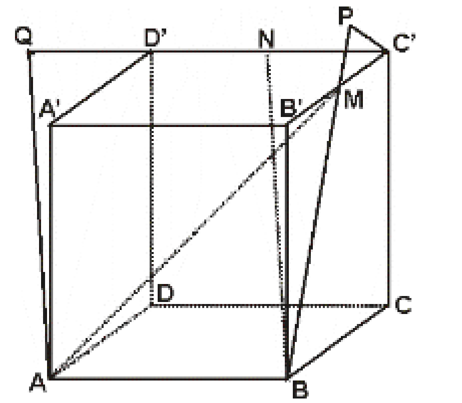
SUBIECTUL 2

a) **Dacă x este număr real şi $x(x + 1) = 12$, calculaţi valoarea expresiei $E(x)=x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$.**

b) **Arătaţi că $A = \sqrt{a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a}$ este iraţional, oricare ar fi a număr natural nenul.**

a) $E(x)= x^4 + x^3 + x^3 + x^2 + x^2 + x = x^3(x+1) + x^2(x+1) + x(x+1)$ (sau altă grupare)	**1p**
$= x(x+1)(x^2 + x + 1)=12(12+1)=156$.	**2p**
OBS: Dacă rezolvă ecuaţia $x^2+x-12=0$(**1p**) şi câte **1p** pentru fiecare înlocuire.	
b) Conform descompunerii de la punctul a) avem $a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a = (a^2 + a)(a^2 + a + 1)$.	**2p**
Dacă $a^2 + a = n$, atunci $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ sau scrie că produsul a două numere naturale consecutive nu este pătrat perfect deoarece este cuprins între două pătrate perfecte consecutive.	**2p**

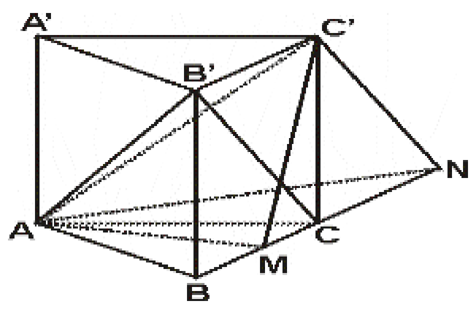
SUBIECTUL 3 Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu muchia de lungime 10 cm. Dacă M este mijlocul muchiei [B'C'], iar N este mijlocul muchiei [C'D'], aflaţi distanţa de la punctul C' la planul (ABM) şi cosinusul unghiului format de dreptele AM şi BN.



$AB \perp (BCC')$ şi $AB \subset (ABM) \Rightarrow (ABM) \perp (BCC')$ şi atunci $d(C', (ABM)) = d(C', BM)$, unde $BM=(ABM) \cap (BCC')$.	**1p**
C'P este înălţime în $\Delta C'MB$, $C'P= 2\sqrt{5}$.	**2p**
OBS: Dacă obţine distanţa, fără a arăta care este, primeşte **3p**.	
Fie AQ ‖ BN, $Q \in D'C' \Rightarrow m[\sphericalangle(AM, BN)]= m[\sphericalangle(AM, AQ)]=m(\sphericalangle MAQ)$. Se obţine triunghiul isoscel AMQ cu AM=AQ=15 cm şi $MQ= 5\sqrt{10}$.	**2p**
$\cos(\sphericalangle MAQ)= \dfrac{4}{9}$.	**2p**

SUBIECTUL 4

Într-o prismă triunghiulară regulată ABCA'B'C' raportul dintre latura bazei şi înălţime este $\sqrt{2}$. Se notează cu M mijlocul muchiei [BC]. Arătaţi că $B'C \perp C'A$ şi $(B'AC) \perp (AMC')$.



Fie C'N ‖ B'C, $N \in BC$, rezultă $m[\sphericalangle(B'C, C'A)]= m[\sphericalangle(C'N, C'A)]$.	**1p**
Dacă a este înălţimea prismei, atunci latura bazei este $a\sqrt{2}$, $C'N=B'C=C'A= a\sqrt{3}$, $AN= \sqrt{BN^2 - AB^2} = a\sqrt{6}$.	**1p**
Din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă $m(\sphericalangle AC'N)=90^0$ $\Rightarrow B'C \perp C'A$.	**1p**
Dacă demonstrează că B'C este perpendiculară pe AM sau C'M.	**2p**
Avem $B'C \perp C'A$, $B'C \perp AM$, $C'A \cap AM=\{A\} \Rightarrow B'C \perp (AMC')$.	**1p**
$B'C \perp (AMC')$, $B'C \subset (B'AC) \Rightarrow (B'AC) \perp (AMC')$.	**1p**

PENTRU CELE **2p** din barem unde-i cere să demonstreze că B'C este perpendiculară pe AM sau C'M:

VARIANTA 1 $AM \perp BC$, $AM \perp CC'$, $BC \cap CC'=\{C\} \Rightarrow AM \perp (BCC')$, $B'C \subset (BCC') \Rightarrow B'C \perp AM$.

VARIANTA 2 Notează $B'C \cap C'M=\{P\}$. Calculează $PM= \frac{1}{3}C'M = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $PC= \frac{1}{3}B'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ şi cu reciproca teoremei lui Pitagora rezultă $m(\sphericalangle MPC)=90^0 \Rightarrow B'C \perp C'M$.