MINISTERUL EDUCAŢIEI NATIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
CLASA A X-A (M_1 4 ore)

– ETAPA LOCALĂ –18.02.2016 –

SUBIECTE

1. a) Comparaţi numerele $A=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{13}$ şi $B=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{8}$.
   b) Demonstraţi că $\log_2 3+\log_3 4\in(2,3)$.

2. a) Fie z un număr complex. Demonstraţi că dacă w este o rădăcină de ordinul trei a lui z, atunci numerele $\varepsilon\cdot w$ şi $\varepsilon^2\cdot w$ sunt celelalte rădăcini de ordinul trei ale lui z, unde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) Fie $a,b,c\in\mathbf{C}$, distincte două câte două, astfel încât $(a+b)^3=(b+c)^3=(c+a)^3$. Demonstraţi că $a^3=b^3=c^3$.

3. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ cu proprietatea că
   $$f(xy)=f(x)+f(y) \text{ pentru orice } x,y\in(0,\infty).$$
   a) Arătaţi că $f(1)=0$ şi $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ pentru orice $x\in(0,\infty)$;
   b) Arătaţi că dacă 1 este singura soluţie a ecuaţiei $f(x)=0$, atunci funcţia f este injectivă.

4. Fie z_A,z_B,z_C afixele vârfurilor triunghiului *ABC*. Fie J, de afix z_J un punct interior triunghiului *ABC* şi S_a,S_b,S_c ariile triunghiurilor *JBC*, *JAC*, respectiv *JAB*.
   a) Demonstraţi că $z_J=\frac{S_a z_A+S_b z_B+S_c z_C}{S}$, unde *S* este aria triunghiului *ABC*.
   b) Demonstraţi că *J* este centrul cercului înscris în triunghiul *ABC* dacă şi numai dacă $(2S_a-ar)z_A+(2S_b-br)z_B+(2S_c-cr)z_C=0$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul *ABC*, iar *a*, *b*, *c* sunt lungimile laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$.

(G.M., 2014 – enunţ modificat)

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de trei ore.
Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.