

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024

CLASA a X-a

1. (7p) Să se determine mulțimea numerelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care se verifică inegalitatea $(\sqrt{x})^x \leq x^{\sqrt{x}}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{10x - 3}$.
 - a) (3p) Să se demonstreze că f este funcție inversabilă.
 - b) (2p) Să se determine inversa funcției f .
 - c) (2p) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x^3 + 3 = 10\sqrt[3]{10x - 3}$.
3. Se consideră numărul $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel ca $(f \circ f)(x) = af(x) + (1 - a^2)x, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - a) (3p) Să se demonstreze că f este funcție injectivă.
 - b) (4p) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
4. Pentru fiecare număr complex nenul z , se consideră mulțimea $A(z) = \{z^0 + z^1 + z^2 + \dots + z^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 - a) (3p) Să se determine mulțimile $A(1)$, $A(-1)$ și $A(i)$.
 - b) (4p) Câte numere complexe z au proprietatea că $A(z)$ are exact 2024 elemente?

- Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.