Olimpiada Naţională de Matematică 2016

Etapa locală – Iaşi, 1 februarie 2016

CLASA A V- A

Problema 1.

Calculaţi: $(37^{2016} : 1369^{1008}) : (2^{2016} - 2^{2015} - \ldots - 2^2 - 2 - 1)$

Problema 2.

Se consideră numărul natural $A = \overline{4a} + \overline{a4}$, unde a este o cifră diferită de 0 . Se cere:

a) Determinaţi cifra a pentru care numărul A este pătrat perfect.

b) Arătaţi că nu există a astfel încât numărul A să fie cub perfect.

Problema 3.

Determinaţi o mulţime finită M de numere naturale consecutive, ştiind că diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic element este 2015, iar suma celor mai mici trei elemente ale mulţimii M este 2016.

Problema 4.

Un piţigoi a vizitat într-o zi 50 de crengi de copac. Pe prima creangă a ciripit o dată, pe a doua creangă a ciripit de două ori şi tot aşa până când pe a 50-a creangă a ciripit de 50 de ori. Piţigoiul răguşeşte dacă într-o zi ciripeşte de 999 de ori. Răspundeţi la următoarele întrebări:

a) A răguşit piţigoiul în acea zi?

b) De cîte ori a ciripit răguşit?

c) De cîte ori a ciripit răguşit pe creanga pe care a răguşit?

Timp de lucru: 2 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică 2016

Etapa locală – Iaşi, 1 februarie 2016

CLASA A V- A

Problema 1. Calculaţi: $(37^{2016} : 1369^{1008}) : (2^{2016} - 2^{2015} - ... - 2^2 - 2 - 1)$

Soluţie şi barem

Observă că $1369 = 37^2$ 1p

Efectuează calculul: $(37^{2016} : (37^2)^{1008}) : (2^{2016} - 2^{2015} - ... - 2^2 - 2 - 1) =$ 1p

$(37^{2016} : 37^{2016}) : \left(\left(2 \cdot 2^{2015} - 2^{2015}\right) - ... - 2^2 - 2 - 1\right) =$ 2p

$1 : (2^{2015} - ... - 2^2 - 2 - 1) = ... 1 : (2 - 1) = 1 : 1 = 1$ 3p

Problema 2. Se consideră numărul natural $A = \overline{4a} + \overline{a4}$, unde a este o cifră diferită de 0 . Se cere:

a) Determinaţi cifra a pentru care numărul A este pătrat perfect.

b) Arătaţi că nu există a astfel încât numărul A să fie cub perfect.

Soluţie şi barem

a) $A = \overline{4a} + \overline{a4} = 40 + a + 10a + 4 = 11a + 44 = 11(a + 4)$ 2p

Se deduce că $a = 7$ şi $A = 11^2$ 1p

b) Pentru ca $A = 11(a + 4)$ să fie cub perfect ar trebui ca $a + 4 = 11^2$ 2p

Prin urmare $a = 11^2 - 4 = 117$ fals deoarece a este cifră.......................2p

Problema 3. Determinaţi o mulţime finită M de numere natural consecutive, ştiind că diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic element este 2015, iar suma celor mai mici trei elemente ale mulţimii M este 2016.

Soluţie şi barem

Fie $M = \{a + 1, a + 2, ..., a + n\}$. 1p

Avem: $(a + n) - (a + 1) = 2015$ şi $a + 1 + a + 2 + a + 3 = 2016$ 3p

Se obţine $n = 2016$ şi $a = 670$ 2p

Mulţimea căutată este $M = \{671, 672, 673, ..., 2686\}$. 1p

Problema 4. Un pițigoi a vizitat într-o zi 50 de crengi de copac. Pe prima creangă a ciripit o dată,

pe a doua creangă a ciripit de două ori și tot așa până când pe a 50-a creangă a ciripit de 50 de ori. Pițigoiul răgușește dacă într-o zi ciripește de 999 de ori. Răspundeți la următoarele întrebări:

a) A răgușit pițigoiul în acea zi?

b) De cîte ori a ciripit răgușit?

c) De cîte ori a ciripit răgușit pe creanga pe care a răgușit?

Soluție și barem

a) Pițigoiul a ciripit de $1+2+3+...+50=1275$ de ori. 2p

Cum $1275>999$, rezultă că a răgușit. 1p

b)Cum $1275-999=276$ de ori...2p

c) Cum $1+2+3+...+44=990$, rezultă că pițigoiul a răgușit pe a 45-a creangă, după ce a ciripit de 9 ori..1p

Apoi el a ciripit de $45-9=36$ de ori...1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.