Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014

Clasa a X a

1. Se consideră un număr natural nenul n fixat şi pentru orice număr natural $k \in \{0,1,2,...,n\}$ se notează $a_k = \left(\sqrt{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)^k$. Determinaţi numerele naturale n pentru care mulţimea $A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ conţine exact 10 numere raţionale.

* * *

2. Determinaţi numerele naturale $n \geq 1$ pentru care $n = \log_2(1+n) + \log_3 n$.

Lucian Dragomir, supliment Gazeta Matematică 9/2013

3. Se notează cu $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea

$$f(x)f(y) = f(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

și, pentru orice $f \in \mathcal{F}$, se consideră mulţimea $H(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 1\}$

a) Arătați că există $g \in \mathcal{F}$ și determinați în acest caz $H(g)$

b) Demonstraţi că, dacă $f \in \mathcal{F}$, atunci f nu este surjectivă.

c) $f \in \mathcal{F}$ este injectivă dacă şi numai dacă $H(f) = \{0\}$.

***

4. Se consideră numerele reale a, b, c şi mulţimile $A = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid z^2 + az \in \mathbb{R}\right\}$, $B = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid z^2 + b\bar{z} + cz \in \mathbb{R}\right\}$. Arătaţi că $A = B$ dacă şi numai dacă $a + b = c$.

RMT 1/2011

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada naţională de matematică,Etapa locală, 15 februarie 2014,Clasa a X a, Barem de evaluare

(1) $a_k = 2^{\frac{n-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{4}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{n-k}{2}, \frac{k}{4} \in \mathbb{Z}$	(4p)
$n \in \{36, 38\}$	(3p)
(2) Se observă soluţiile $n=1, n=3$	
$\log_2 3 + \log_3 2 > 2 \Rightarrow n=2$ nu este soluţie	(1p)
$\log_2 5 < \frac{5}{2}$ şi $\log_3 4 < \frac{3}{2}$, aşadar nici $n=4$ nu este soluţie	(1p)
$\log_2 6 + \log_3 5 < 3+2=5 \Rightarrow n=5$ nu este soluţie	(1p)
Pentru $n \geq 6$ se demonstrează prin inducţie că $\log_2(1+n) < \frac{n}{2}$ sau $2^n > (n+1)^2$ şi $\log_3 n < \frac{n}{2}$ sau $3^n > n^2$, de unde $\log_2(1+n) + \log_3 n < n$; aşadar ecuaţia are doar soluţiile observate iniţial	(2p)
(3) a) de exemplu $g(x) = e^x \Rightarrow H(g) = \{0\}$	(1p)
b) Facem substituţiile $x \to \frac{x}{2}, y \to \frac{x}{2} \Rightarrow f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f nu este surjectivă;	(2p)
c) (I) pentru $x=y=0 \Rightarrow f^2(0) = f(0) \Rightarrow f(0)=0$ sau $f(0)=1$. Dacă $f(0)=0$, atunci pentru $y=0$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0)f(x) = f(x) \Rightarrow f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f nu e injectivă. Dacă $f(0)=1$, cum f este injectivă deducem $f(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$.	(2p)
(II).Reciproc, în relaţia dată facem substituţia $y \to -y \Rightarrow f(x)f(-y) = f(x-y)$ (1). Dacă $y = x \Rightarrow f(x)f(-x) = f(0) = \ =1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ şi acum relaţia (1) se scrie $\frac{f(x)}{f(y)} = f(x-y)$. Considerăm x, y cu $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x-y) = 1 \Rightarrow$ $(x-y) \in H(f) \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$ adică f este injectivă.	(2p)
(4) $z^2 + b\bar{z} + cz = z^2 + b\bar{z} + bz + (c-b)z \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $z^2 + (c-b)z \in \mathbb{R}$	(2p)
Dacă $c-b=a$ atunci, cum $b\bar{z} + bz \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, deducem că $A=B$.	(3p)
Reciproc, dacă $A=B$, luăm $z = -\frac{a}{2} + i \in A$ şi avem $\left(-\frac{a}{2}+i\right)\left((c-b) - -\frac{a}{2}+i\right) \in \mathbb{R}$, de unde $c = a+b$	(2p)