OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
Barem, clasa a XI– a

1. Logaritmăm relaţia dată: $n\log_a b = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n$ .... 2p.
   Aplicăm inegalitatea mediilor .... 1p.
   Ţinând cont că expresiile care intervin sunt strict pozitive obţinem:
   $\log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n \geq n \cdot \sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \cdots \cdot \log_a x_n}$ ..... 2p.
   Finalizare.. 2p.

2. a) Aplicăm inegalitatea lui Bernoulli pentru un $k \in N^*$, $n \geq 2$:............. 1p

$$\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^n \geq 1+n\cdot\frac{k-1}{n} \Leftrightarrow \left(1+\frac{k-1}{n}\right)^n \geq k \Leftrightarrow \frac{n+k-1}{n} \geq \sqrt[n]{k} \Leftrightarrow$$ 1p

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{k}} \geq \frac{n}{n+k-1}.$$ .... 1p.

Altfel: $\sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{k \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{k-1-szer}} \leq \frac{k+n-1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{k}} \geq \frac{n}{n+k-1}.$

b) $$\frac{1}{\sqrt[n]{k}} \geq \frac{n}{n+k-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{k}\cdot(n+k)} \geq \frac{n}{(n+k-1)\cdot(n+k)} \Leftrightarrow$$ 2p

$$\frac{1}{\sqrt[n]{k}\cdot(n+k)} \geq n\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right).$$ 1p

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{k}\cdot(n+k)} \geq n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right) = n\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$ .... 1p.

3. a) Din: $|z|^2 = z\cdot\bar{z} \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}, \quad \bar{z}_2 = \frac{16}{z_2} \quad \bar{z}_3 = \frac{25}{z_3}$ 2p

$$0 = \overline{z_1+z_2+z_3} = \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3 = \frac{9}{z_1}+\frac{16}{z_2}+\frac{25}{z_3}$$ .... 2p.

b) Din a) obţinem $0 = 9z_2z_3 + 16z_1z_3 + 25z_1z_2$ 1p
   Punem $z_3 = -z_1 - z_2$, obţinem: $16z_1^2 + 9z_2^2 = 0$. .... 2p.

4. a) Ecuaţia $\sqrt{x}+3x = 4x^2$, are cel mult 2 soluţii, membrul stâng fiind o funcţie concavă, iar membrul drept o funcţie strict convexă. 1p
   Obţinem soluţiile: $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$. .... 1p.
   b) Injectivitate 2p
   Surjectivitate .... 1p.
   c) Considerand funcţia bijectivă $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $h(x)=4x^2$, relaţia dată devine:
   $g \circ f = h$ 1p
   Atunci $f = g^{-1}\circ h$, este bijecţie ca o compusă a două bijecţii. .... 1p.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
CLASA a X– a

1. Considerăm numerele reale $a, b, x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,1)$ astfel încât $b^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$. Să se arate că $(\log_a b)^n \geq \log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \cdots \cdot \log_a x_n$.

G.M. 11/2012

2. a) Să se arate că $\dfrac{1}{\sqrt[n]{k}} \geq \dfrac{n}{n+k-1}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot(n+2)} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}\cdot(n+3)} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot(n+n)} \geq \frac{1}{2}.$$

Mastan Eliza, Longaver Ludovic

3. Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 având proprietățile $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $|z_3| = 5$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

a) Să se calculeze $\dfrac{9}{z_1} + \dfrac{16}{z_2} + \dfrac{25}{z_3}$.

b) Să se calculeze $16z_1^2 + 9z_2^2$.

4. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ care verifică relaţia

$$\sqrt{f(x)} + 3 \cdot f(x) = 4x^2, \forall x \geq 0.$$

a) Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x} + 3x = 4x^2$.

b) Să se arate că funcţia $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3x$ este bijectivă.

c) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de către:

prof. Longaver Ludovic, Liceul Teoretic „Nemeth Laszlo”, Baia Mare.
prof. Muşuroia Nicolae, Colegiul Naţional „Gheorghe Șincai”, Baia Mare.