Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - 22 februarie 2014 - Maramureş

Clasa a V-a

1. Fie $a = 5^{205} - 3 \cdot 5^{204} - 3^2 \cdot 5^{203} - 4 \cdot 5^{202}$ și $b = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + ... + 2 \cdot 3^{302}$.

a) Demonstrați că pentru orice număr natural n are loc relația :

$$2 \cdot 3^n = 3^{n+1} - 3^n$$

b) Arătați că numărul a este pătrat perfect .

c) Comparați numerele a și b .

G.M/2013 (enunț modificat)

2. a) Determinați toate perechile de numere naturale $(a;b)$ astfel încât $a^2 + b^2 = 250$.

b) Scrieți numărul 2014^{2013} ca suma a trei pătrate perfecte distincte nenule.

3. a) Determinați cifrele nenule a,b,c,d astfel încât să verifice egalitatea :

$$\overline{abcd} - \overline{abc} + \overline{ab} + a = 5873.$$

b) Se consideră șirul 0,1,1,2,3,5,8,13,...

i) Să se scrie următorii doi termeni ai șirului .

ii) Să se stabilească paritatea celui de–al 2014-lea termen al șirului.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de:

prof. Heuberger Cristian – C. N. „Gheorghe Șincai” Baia Mare, prof. Ienuțaș Vasile – Şc. Gim. “George Coşbuc” Baia Mare, prof. Popovic Ioana – Şc. Gim. “Octavian Goga” Baia Mare, prof. Pop Sever – Şc. “Vasile Alecsandri” Baia Mare

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

1.a) Scoaterea factorului comun 1p
Finalizare..1p

b) $a=5^{202}(125-75-45-4)=5^{202}$ 2p

$5^{202}=\left(5^{101}\right)^2$ 1p

c) $b=2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+...+2\cdot3^{302}\,\big|\cdot3 \Leftrightarrow 3b=2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+...+2\cdot3^{303}$

$3b-b=2\cdot3^{303}-2$

$b=3^{303}-1$ 1p

$\left(5^2\right)^{101}<\left(3^3\right)^{101}\Rightarrow 5^{202}\le 3^{303}-1$ dar $u\left(5^{202}\right)=5$ și $u\left(3^{303}-1\right)=8\Rightarrow a<b$ 1p

2. a) $a^2+b^2=250\Rightarrow a<16$ 1p

$a=15\Rightarrow b=5$ 1p

$a=13\Rightarrow b=9$ 1p

b) $2014^{2013}=2014\cdot2014^{2012}=2014\cdot\left(2014^{1006}\right)^2$ 1p

$a^2+b^2+c^2+d^2=2014; a\ne b\ne c\ne d\ne a\Rightarrow a^2<2014\Rightarrow a=44$

$b^2+c^2+d^2=78; a\ne b\ne c\ne d\ne a\Rightarrow b^2<78\Rightarrow b<8$ 1p

$b=7\Rightarrow b^2+c^2=29\Rightarrow (b,c)\in\{(2;5),(5;2)\}$ 1p

$2014^{2013}=\left(44\cdot2014^{1006}\right)^2+\left(7\cdot2014^{1006}\right)^2+\left(5\cdot2014^{1006}\right)^2+\left(2\cdot2014^{1006}\right)^2$ 1p

3.

$\overline{abcd}-\overline{abc}+\overline{ab}+a=5873\Leftrightarrow$

$911a+91b+9c+d=5873\Leftrightarrow$ ....$(1p)$

$911a+\underbrace{91b+9c+d}_{\le 910<911}=911\cdot6+407\overset{T.I.R}{\Leftrightarrow}\begin{cases}a=6\\ 91b+9c+d=407\end{cases}$ ....$(1p)$

$\begin{cases}a=6\\ 91b+\underbrace{9c+d}_{<91}=91\cdot4+43\end{cases}\overset{T.I.R}{\Leftrightarrow} 9c+d=43$ ....$(1p)$

$a=6, b=4, c=4, d=7$ ....$(1p)$

4. i)Următorii termeni sunt 21,34 ....(2p)

ii) Șirul 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34... observă că se poate împărți în grupe de 3 termeni dintre care primul este par și ceilalți doi impari , iar 2014:3=671 rest 1 , deci a_{2014} este par..1p