Barem clasa a X-a
(OLM 2016-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

Din $|z|=|z-a| \Rightarrow |z|^2=|z-a|^2 \Rightarrow z\bar{z}=(z-a)(\bar{z}-a) \Rightarrow z+\bar{z}=a \Rightarrow \mathrm{Re}(z)=\frac{a}{2}$, $\quad z=\frac{a}{2}+bi, b\in R$ **(3 puncte)**

$|z|=\left|\frac{a}{z}\right| \Rightarrow |z|^2=a \Rightarrow \frac{a^2}{4}+b^2=a \Rightarrow b=\pm\sqrt{a-\frac{a^2}{4}}$ **(2 puncte)**

S-a folosit $a\in(0,4)$ **(1 punct)** Deci, $z_{1,2}=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}i$ **(1 punct)**

Subiectul II. (7 puncte)

Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $log_{2016}\frac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_{2016}+a_1)}{a_1a_2\dots a_{2016}} \geq log_{2016}2^{2016}$, **(3 puncte)**

$(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_{2016}+a_1) \geq 2^{2016}a_1a_2\dots a_{2016}$ **(1 punct)**

Din inegalitatea mediilor avem:

$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$, $\frac{a_2+a_3}{2} \geq \sqrt{a_2a_3}$, ..., $\frac{a_{2016}+a_1}{2} \geq \sqrt{a_1a_{2016}}$ **(2 puncte)**

care, prin înmulţire dau relaţia de mai sus. Egalitatea are loc dacă $a_1=a_2=\dots=a_{2016}$ **(1 punct)**

Subiectul III. (7 puncte)

Folosind inegalitatea mediilor, avem:

$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b) \geq \frac{4ab}{2}+\frac{1}{4}(a+b)=\frac{(4ab+a)+(4ab+b)}{4} \geq \frac{2\sqrt{4a^2b}+2\sqrt{4ab^2}}{4}=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ **(4 puncte)**

b) Inegalitatea se poate demonstra prin „spargere'' în trei inegalităţi deduse din inegalitatea de la punctul a) în care luăm $a=tgx, b=tgy, c=tgz$ **(3 puncte)**

Subiectul IV. (7 puncte)

a) Inegalitatea se poate scrie sub forma $\frac{\sqrt{4^x-1}}{4^x}+\frac{\sqrt{2^x-1}}{2^x}<1$. **(2 punct)**

Vom arăta că $\frac{\sqrt{4^x-1}}{4^x}<\frac{1}{2}$ şi $\frac{\sqrt{2^x-1}}{2^x}<\frac{1}{2}$, de unde prin adunare se obţine inegalitatea ceruta. **(1 punct)**

pentru $\forall x>1$ se verifică că $\frac{\sqrt{x-1}}{x}\leq\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{x-1}}{x}\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\leq x \Leftrightarrow 4(x-1)\leq x^2 \Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0 \quad (A)$ **(1 punct)**

b) Funcția f este bijectivă $\Rightarrow \exists!\, \alpha \in R$ astfel încât $f(\alpha)=0$ (*)

Fie $x, y \in R$ astfel încât $f(y)=\frac{x-f(x)}{3}$

Înlocuind în relația din ipoteză obținem $f\left(2x+f(x)+3\cdot\frac{x-f(x)}{3}\right)=f(3x)+f(3y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(3x)=f(3x)+f(3y) \Rightarrow f(3y)=0 \overset{(*)}{\Rightarrow} 3y=\alpha \Rightarrow y=\frac{\alpha}{3}$

Atunci, $f\left(\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{x-f(x)}{3} \Rightarrow f(x)=x-3f\left(\frac{\alpha}{3}\right) \Rightarrow f(x)=x-\propto, \propto\in R$ **(2 puncte)**

Relația dată este echivalentă cu $[2x+(x-\propto)+3(y-\propto)]-\propto=(3x-\propto)+(3y-\propto) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+3y-5\propto=3x+3y-2\propto \Rightarrow \propto=0$

În concluzie, singura funcție cu proprietatea cerută este $f:R\to R\ f(x)=x$ **(1 punct)**