

S.S.M.R - FILIALA MUREȘ
Olimpiada de matematică
Faza locală 26.02.2016
Clasa a X-a

SUBIECTUL I

Fie numărul complex $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Să se calculeze produsul:

$$P = (1+z)(1+z^2)\dots(1+z^{1008}).$$

SUBIECTUL II

a) Să se demonstreze că pentru orice z_1, z_2 numere complexe, are loc relația

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

b) Știind că $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = 1$ și $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, să se calculeze $|z_1 + z_2|$.

SUBIECTUL III

a) Demonstrați inegalitatea $2016^{\log_{2015} 2014} > 2014^{\log_{2016} 2017}$.

b) Fie $x, y \in (-1, 2)$ astfel încât $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2-x}{3} \right) \cdot \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{1+y}{3} \right) = 1$.

Aflați minimumul expresiei $K = xy + x - 2y$.

SUBIECTUL IV

Rezolvați ecuația: $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.