OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a X – a

Problema 1. Arătaţi că $\left(\frac{\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+...+\log_{2015} 2016}{2012}\right)^{2012}>5$.

Problema 2. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$ şi $|z_1|=|z_2|=1$. Să se arate că $|z_1-z_2|=1$.

Problema 3. Să se determine funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\ln(xy)\leq f(x)+f(y)-x-y\leq f(xy)-xy,\quad (\forall)\, x,y\in(0,\infty).$$

Problema 4. Se consideră funcţia surjectivă $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ şi funcţia strict crescătoare $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, astfel încât $f(x)\geq g(x)$, pentru fiecare $x\in\mathbb{N}$.

a) Arătaţi că $f(x)=g(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{N}$;

b) Calculaţi $f(1)-g(2)+f(3)-g(4)+...+f(2015)-g(2016)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 5. 03. 2016
BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

Problema 1. Arătaţi că $\left(\dfrac{\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\ldots+\log_{2015}2016}{2012}\right)^{2012}>5.$

Barem de corectare. Utilizând inegalitatea dintre media aritmetică şi geometrică se obţine:

(3p) $\left(\dfrac{\log_4 5+\log_5 6+\ldots+\log_{2015}2016}{2012}\right)^{2012} > \left(\sqrt[2012]{\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\ldots\cdot\log_{2015}2016}\right)^{2012}$

(2p) $=\log_4 2016$

(2p) $>\log_4 1024=5$

Problema 2. Fie $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, astfel încât $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$ şi $|z_1|=|z_2|=1$. Să se arate că $|z_1-z_2|=1$.

Barem de corectare.

(2p) Se foloseşte faptul că $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, pentru orice $z\in\mathbb{C}$.

(3p) Deoarece, $3=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=2+\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$,

(2p) se obţine $(z_1-z_2)^2=-z_1z_2$, de unde rezultă că $|z_1-z_2|=1$.

Problema 3. Să se determine funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\ln(xy)\le f(x)+f(y)-x-y\le f(xy)-xy,\quad (\forall)\,x,y\in(0,\infty).$$

Barem de corectare.

(2p) Din $\ln(xy)\le f(xy)-xy$, rezultă $f(t)-t\ge\ln t$, $(\forall)\ t\in(0,\infty)$.

(2p) Dacă notăm $f(x)-x=g(x)$, atunci

$$\ln(xy)\le g(x)+g(y)\le g(xy),\quad (\forall)\,x,y\in(0,\infty).$$

Pentru $x=y=1$ avem $0\le 2g(1)\le g(1)$, adică $g(1)=0$.

(3p) Pentru $y=\dfrac{1}{x}$, obţinem:

$$0\le g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)\le 0\Rightarrow g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow (g(x)-\ln x)+\left(g\left(\frac{1}{x}\right)-\ln\frac{1}{x}\right)=0.$$

Cum $g(t)\ge\ln t$, pentru orice $t\in(0,\infty)$, rezultă că $g(x)-\ln x=g\left(\dfrac{1}{x}\right)-\ln\dfrac{1}{x}=0$, adică $f(x)=\ln x+x$.

Problema 4. Se consideră funcţia surjectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ şi funcţia strict crescătoare $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel încât $f(x) \geq g(x)$, pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că $f(x) = g(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{N}$;

b) Calculaţi $f(1) - g(2) + f(3) - g(4) + ... + f(2015) - g(2016)$.

Barem de corectare.

(3*p*) *a*) Deoarece f este surjectivă, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $f(n_0) = 0$. Rezultă $g(n_0) \leq 0$, de unde $g(n_0) = 0$. Dacă $n_0 > 0$, atunci $0 = g(n_0) > g(0) \geq 0$, absurd, deci $n_0 = 0$. Rezultă $f(0) = g(0) = 0$.

(2*p*) Prin inducţie, se arată că $f(n) = g(n) = n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

(2*p*) *b*) Prin calcul direct avem: $f(1) - g(2) + f(3) - g(4) + ... + f(2015) - g(2016) = -1008$.

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.