**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**Faza locală**
**Braşov, 26 februarie 2016**

**Clasa a XI-a**

1. Fie matricea $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha & 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \qquad \alpha \in [0, 2\pi).$

   a) Arătaţi că $A_\alpha^n = \frac{1}{3}\left[(3\cos\alpha + 1)^n - 1\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + I_3$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

   b) Fie $S(A_\alpha^n)$ suma elementelor matricei $A_\alpha^n$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(A_\alpha^n)}{4^n}$. Discuţie în funcţie de $\alpha$.

Ioana Maşca

2. Arătaţi că există o infinitate de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A^3 = I_2$.

Cătălin Ciupală

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n = \left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}^{\frac{an}{(2-\sqrt{3})^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, iar $\{t\}$ desemnează partea fracţionară numărului real $t$.

   a) Arătaţi că $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}*$.

   b) Precizaţi valorile parametrului $a$ pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Florica Zubaşcu-Andreica

4. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea matricelor de ordinul $n$, $n \geq 2$, care au pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element egal cu 1, iar celelalte sunt egale cu 0.

   a) Să se demonstreze că există o funcţie bijectivă $\varphi : S_n \longrightarrow \mathcal{P}$, unde $S_n$ este mulţimea permutărilor de ordinul $n$.

   b) Calculaţi $S = \sum\limits_{A\in\mathcal{P}} \big(\det(A)\big)^2$.

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii, decembrie 2015, enunţ modificat

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**Faza locală**
**Braşov, 26 februarie 2016**
**Soluţii**

**Clasa a XI-a**

1. Fie matricea $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha & 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \alpha \in [0, 2\pi)$.

   a) Arătaţi că $A_\alpha^n = I_3 + \dfrac{(3\cos\alpha+1)^n - 1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Fie $S(A_\alpha^n)$ suma elementelor matricei $A_\alpha^n$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(A_\alpha^n)}{4^n}$. Discuţie în funcţie de $\alpha$.

Ioana Maşca

**Soluţie.**
a) Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Din $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$, obţinem $A_\alpha = I_3 + \cos\alpha \cdot B$. **(1p)**
Avem $B^k = 3^{k-1}B,\ k \in \mathbb{N}^*$ (demonstraţie prin inducţie). **(1p)**
Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând formula binomului lui Newton, obţinem

$$A_\alpha^n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k \cos^k\alpha\right) B^k = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1} \cos^k\alpha\right) B = I_3 + \frac{(3\cos\alpha+1)^n - 1}{3} B. \ \textbf{(2p)}$$

b) $S(A_\alpha^n) = 3 + 9 \cdot \dfrac{(3\cos\alpha+1)^n - 1}{3} = 3(3\cos\alpha+1)^n$. **(1p)**
Dacă $\alpha \in (0, 2\pi)$, atunci $|3\cos\alpha + 1| < 4$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(A_\alpha^n)}{4^n} = 0$. **(1p)**
Dacă $\alpha = 0$, atunci $S\left(A_\alpha^n\right) = 3 \cdot 4^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(A_\alpha^n)}{4^n} = 3$. **(1p)**

2. Arătaţi că există o infinitate de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $A^3 = I_2$.

Cătălin Ciupală

**Soluţie.**
Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Dacă $A^2 + A + I_2 = O_2$, atunci $A^3 = I_2$. **(1p)**
Pentru a avea $A^2 + A + I_2 = O_2$, este suficient ca $Tr(A) = -1$ şi $\det(A) = 1$. **(2p)**

Astfel, matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -a-1 \end{pmatrix}$, cu $bc = a^2 + a + 1$, au proprietatea $A^3 = I_2$. **(2p)**
De exemplu, familia infinită de matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k^2+k+1 \\ -1 & -k-1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$, satisface cerinţa. **(2p)**

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n = \left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}^{\frac{an}{(2-\sqrt{3})^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, iar $\{t\}$ desemnează partea fracţionară numărului real $t$.
   a) Arătaţi că $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Precizaţi valorile parametrului $a$ pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Florica Zubaşcu-Andreica

**Soluţie.**

a) Avem $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} 2^{n-2k} 3^k \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in N^*$. **(2p)**
b) Din a) şi $(2-\sqrt{3})^n \in (0,1)$, deducem $\left[(2+\sqrt{3})^n\right] = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$.
Rezultă $\left\{(2+\sqrt{3})^n\right\} = 1 - (2-\sqrt{3})^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. **(2p)**
Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1-(2-\sqrt{3})^n\right)^{-\frac{1}{(2-\sqrt{3})^n}}\right]^{-na} = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ \infty, & a < 0 \end{cases}$.
Deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent pentru $a > 0$. **(3p)**

4. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea matricelor de ordinul $n$, $n \geq 2$, care au pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element egal cu 1, iar celelalte sunt egale cu 0.
   a) Să se demonstreze că există o funcţie bijectivă $\varphi : S_n \longrightarrow \mathcal{P}$, unde $S_n$ este mulţimea permutărilor de ordinul $n$.
   b) Calculaţi $S = \sum\limits_{A\in\mathcal{P}} \big(\det(A)\big)^2$.

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii, decembrie 2015, enunţ modificat

**Soluţie.**

a) Definim $\varphi : S_n \longrightarrow \mathcal{P}$, $\varphi(\sigma) = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, cu $a_{ij} = \begin{cases} 1, & j = \sigma(i) \\ 0, & j \neq \sigma(i) \end{cases}$, $\sigma \in S_n$ **(2p)**

Funţia $\varphi$ este inversabilă, cu inversa $\varphi^{-1} : P \to S_n$ definită prin $\varphi^{-1}\left((a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\right) = \sigma$, unde $\sigma(i) = j$, pentru $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ astfel ca $a_{ij} = 1$. Deci $\varphi$ este bijectivă. **(2p)**
b) Pentru $A = \varphi(\sigma) \in \mathcal{P}$, avem $\det(A) = \mathrm{sng}(\sigma) \in \{-1, 1\}$. **(1p)**
Astfel, $S = \sum\limits_{A\in\mathcal{P}} \big(\det(A)\big)^2 = \sum\limits_{\sigma\in S_n} 1 = |S_n| = n!$. **(2p)**