OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014

Clasa a XII-a

1. **Fie a $\in (0,\ \infty)$ si f: R $\rightarrow$ R o funcție pară , derivabilă cu derivata continuă. Să se calculeze :**

$$\int_{-a}^{a}\left[\frac{f(x)}{1+e^x}+f'(x)\cdot\ln(1+e^x)\right]dx\ .$$

2. **Se consideră funcția : R $\rightarrow$ R . Să se determine c $\in$ R astfel încât f să admită primitive pe R , cu** $f(x)=\begin{cases}\sin^2\frac{1}{x}\cdot\cos^3\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$

.

3. **Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ si $H=\{x\in G/x^2=e\}$.**

a) **Arătați că H este subgrup al lui G.**

b) **Dacă G este finit și $2ordH > ordG$ atunci $H=G$.**

***

4. **Fie $(A,+\cdot)$ un inel cu proprietatea $(x^2-x)y=y(x^2-x)$, oricare $x,y\in A$. Demonstrați că $(A,+\cdot)$ este un inel comutativ.**

***

Nota:

- **Timp de lucru 3 ore.**
- **Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.**

Olimpiada Nationala de Matematica

Etapa locala , 16 februarie 2014, Botosani

Clasa a XII-a

Barem :

1.

- *f derivabila para $\rightarrow f'$ impara ………………………………………… .1p*
- *cu substitutia t= - x obtinem*
  $I=\int_{-a}^{a}\left[\frac{f(-t)}{1+e^{-t}}+f'(-t)\cdot ln(1+e^{-t})\right]dt=$

$=\int_{-a}^{a}\left[\frac{f(t)\cdot e^{t}}{1+e^{t}}-f'(t)\cdot ln(1+e^{t})+t\cdot f'(t)\right]$ ……………………………… 3p

- $2I=I+I=\int_{-a}^{a}\left[\frac{f(t)\cdot(1+e^{t})}{1+e^{t}}+t\cdot f'(t)\right]dt=\int_{-a}^{a}[f(t)+t\cdot f'(t)]dt==t\cdot f(t)\Big|_{-a}^{a}=$
  $af(a)+af(-a)=2af(a)\rightarrow I=af(a)$…..3p

2. *Pentru $x\neq 0$, functia f se scrie $f(x)=\frac{1-cos\frac{2}{x}}{2}\cdot\frac{cos\frac{3}{x}+3cos\frac{1}{x}}{4}=$*

$=\frac{1}{16}\cdot\left(2\cdot cos\frac{1}{x}-cos\frac{3}{x}-cos\frac{5}{x}\right)$ ……………………………………………… 2p

$f(x)=\frac{1}{8}\cdot\begin{cases}cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}-\frac{1}{16}\cdot\begin{cases}cos\frac{3}{x}, x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}-\frac{1}{16}\cdot\begin{cases}cos\frac{5}{x}\ , x\neq 0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}+\quad+\begin{cases}0\ , x\neq 0\\ c\ , x=0\end{cases}$
…………………………………………………………………………2p

Functiile de forma $g(x)=\begin{cases}cos\frac{k}{x}\ , x\ \neq 0\\ 0\ , x=0\end{cases}$ ($k\neq 0$)admit primitive pe R …2p

Functia f admite primitive daca si numai daca c=0 ……………………………1p

3. *a) $\forall x,y\in H\rightarrow(xy)^2=xyxy=x^2y^2=e\cdot e=e$, deci $xy\in H$ ………..2p*

$\forall x\in H\rightarrow x^2=e\rightarrow x^{-1}=x\in H$……………………………………………………………1p

Deci Hsubgrup al lui G……………………………………………………………………………1p

b) Din teorema lui Lagrange avem $ordG\ \vdots\ ordH\ \rightarrow ordG=k\cdot ordH, k\in N^*$ …..1p
$2ordH>ordG\rightarrow 2ordH>\ k\cdot ordH\rightarrow 2>k\rightarrow k=1$…………1p
Deci $ordG=ordH\rightarrow G=H$……………………………………………1p

4. $(x+y)^2-(x+y)=(x^2-x)+(y^2-y)+(xy+yx)$………………**2p**

$xy+yx=(x+y)^2-(x+y)-(x^2-x)-(y^2-y)$……………………..**1p**

$(xy+yx)x=x(xy+yx)$…………………………………………………**2p**

$yx^2=x^2y$…………………………………………………………………...**1p**

$(x^2-x)y=y(x^2-x)\rightarrow xy=yx$ **oricare** $x,y\in A$………………………..**1p**