OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 IANUARIE 2015

CLASA a VI-a

Subiectul 1. Fie numerele $a=8\cdot 3^{n+2}\cdot 25^{n+1}$ şi $b=7\cdot 5^{n+2}\cdot 15^{n+1}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a. Comparați cele două numere.

b. Arătaţi că cele două numerele dau acelaşi rest prin împărţirea cu 165, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Subiectul 2. Media aritmetică a numerelor naturale distincte $a_1,a_2,a_3,...,a_{2014}$, 2014 şi 2016 este 2015.

a. Aflaţi media aritmetică a numerelor $a_1,a_2,a_3,...,a_{2014}$.

b. Dacă numerele $a_1,a_2,a_3,...,a_{2014}$ sunt pare arătaţi că $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_{2014}=0$.

Subiectul 3. Să se determine cardinalul mulțimii $A=\left\{\overline{ab}\ \middle|\ \frac{16}{a^2+b}\in\mathbb{N}\right\}$.

Subiectul 4. Fie semidreptele opuse $[OX$ şi $[OY$, punctele A şi B de aceeaşi parte a dreptei XY, astfel încât $m(\sphericalangle BOX)=2\cdot m(\sphericalangle AOY)$, iar unghiul BOX este obtuz.:

a) Arătaţi că $m(\sphericalangle AOX)>m(\sphericalangle AOY)$.

c) Dacă $[OB$ este bisectoarea $\sphericalangle AOY$ atunci aflaţi $m(\sphericalangle AOY)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru: 2 ore

Inspectoratul Şcolar Județean Neamț
Piatra Neamţ, jud. Neamţ, str. Lt. Drăghiescu, Nr.4A
tel. 0233/214860, fax 0233/215807, e-mail: isj_neamt@yahoo.com

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
30 IANUARIE 2015
CLASA a VI-a
Bareme

Subiectul 1.

a.	$a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1} = 8 \cdot 3^{n+1} \cdot 3 \cdot 25^{n+1} = 75^{n+1} \cdot 24$ $b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1} = 7 \cdot 5^{n+1} \cdot 5 \cdot 15^{n+1} = 75^{n+1} \cdot 35$ $\Rightarrow a < b$	**3p**
b.	$a = 75^{n+1} \cdot 24 = 75^{n+1} \cdot (22 + 2) = 75^{n+1} \cdot 22 + 75^{n+1} \cdot 2$ $b = 75^{n+1} \cdot 35 = 75^{n+1} \cdot (33 + 2) = 75^{n+1} \cdot 33 + 75^{n+1} \cdot 2$ $75^{n+1} \cdot 22 \vdots 165$ şi $75^{n+1} \cdot 33 \vdots 165$ restul împărţirii lui a la 165 este restul împărţirii lui $75^{n+1} \cdot 2$ la 165 restul împărţirii lui b la 165este restul împărţirii lui $75^{n+1} \cdot 2$ la 165.	**4p**

Subiectul 2.

a.	$(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014} + 2014 + 2016) : 2016 = 2015 \Rightarrow$ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014} = 2015 \cdot 2016 - 2016 - 2014 \Rightarrow$ $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2014}) : 2014 = 2015$	**3p**
	Calculă suma celor mai mici 2014 numere pare, distincte, nenule şi diferite de 2014 şi 2016: $2+4+6+...+2012+2018+...+4032 = 2(1+2+...+2016) - 2014 - 2016 =$ $= 2016 \cdot 2017 - 2016 - 2014 = 4062242$ sumă care este cu 4032 mai mare decât 2014·2015 Trebuie sa scădem 4032 din sumă, numerele trebuie să rămână pare, deci unul dintre numere devine 0.	**4p**

Subiectul 3.

	$\frac{16}{a^2+b} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 + b / 16 \Rightarrow a^2 + b \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$	**2p**
	$a^2 + b = 16 \Rightarrow$ a=4 şi b=0 sau a=3 şi b=7$\Rightarrow$ numerele 40 şi 37	**1p**
	$a^2 + b = 8 \Rightarrow$ a=2 şi b=4 sau a=1 şi b=7$\Rightarrow$ numerele 24 şi 17	**1p**
	$a^2 + b = 4 \Rightarrow$ a=2 şi b=0 sau a=1 şi b=3$\Rightarrow$ numerele 20 şi 13	**1p**
	$a^2 + b = 2 \Rightarrow$ a=1 şi b=1 $\Rightarrow$ numărul 11	**1p**
	$a^2 + b = 1 \Rightarrow$ a=1 şi b=0 $\Rightarrow$ numărul 10 deci cardinalul mulţimii A este 8	**1p**

Subiectul 4.

a.	$2\cdot m(\sphericalangle AOY) < 180° \Rightarrow m(\sphericalangle AOY) < 90°$ $m(\sphericalangle AOX) = 180° - m(\sphericalangle AOY) \Rightarrow m(\sphericalangle AOX) > 90°$ $\Rightarrow m(\sphericalangle AOX) > m(\sphericalangle AOY)$.	**3p**
b.	[OB este bisectoarea $\sphericalangle AOY \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOY) = \frac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle AOY)$ $m(\sphericalangle BOX) + m(\sphericalangle BOY) = 180° \Rightarrow 2\cdot m(\sphericalangle AOY) + \frac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle AOY) = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\sphericalangle AOY) = 72°$	**4p**